OSMANIA UNIVERSITY

جامعۂ عثمانیہ

احصائے تفرقی و تکملی

برائے

انٹرمیڈیٹ

سلسلۂ نصابیات علمیہ جامعۂ عثمانیہ

نشان ۲۸۱

تفرّقی و تکمّلی احصا

Differential & Integral Calculus

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تالیف

پروفیسر کشن چند صاحب

و

ڈاکٹر رضی الدین صدیقی صاحب

معین امیر جامعہ عثمانیہ

۱۳۶۷ھ م ۱۳۵۷ف م ۱۹۴۸ء

مطبوعہ

دار الطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن

طبع دوم

(۱۰۰۰)

صحت نامہ

احصائے تفرقی و تکملی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۴	۱۳	=ا ا۱ =	=ا ا۱ =	۹۵	۱۴	نہا ط ←	نہا ط ← ۰
۴۳	۲۳	نفصہ	فَصلہ	۹۷	۱۳	۰۰۸۷۲۶۶ء	۰۰۸۷۲۶۶ء =
۶۷	۱۹	کی دل	کی اس	۹۸	۱۲	جب ۳ لا - جم ۲ لا / جب ۲ لا	جب ۳ لا - جم ۲ لا / جب ۲ لا
۶۹	۱۸	طاق عـدد	طاق عدد	۱۱۳	۱۷	√۵ ۲ لا۲	√۵ ۲ لا۲
۷۱	۳	اپرغیر	اپرہ غیر	۱۱۹	۶	رقم۲ لا فرلا	رقم۲ لا فرلا
۷۸	۱۱	= - م۰ (م - ۱	= - م۰ م - م - ۱	۱۲۴	۱	فر (جب لا۲) / فرلا	فر (جب لا) / فرلا
؍؍	۱۵	زلا + ھ	لا + ھ	۱۳۵	۱۷	جبکہ	جبکہ د
۷۹	۱۴	لا / ن + ۱	لا / نَ + ۱	۱۵۹	۱۴	ط = ف۲ (ط)	ا = ف۲ (ط)
؍؍	۱۵	لا / ن - ۱	لا / نَ - ۱	۱۵۹	۲۱	فَ۲ (ط) / فَ۱ (ط)	فَ۲ (ط) / فَ۱ (ط)
۸۶	۷	وما	وما	۱۷۲	۲ دو جگہ	ٹھہراؤ	ٹھیراؤ
۸۴	۱۳	وھ - ۱ / ھ	وھ - ۱ / ھ				

کر دیں اگرچہ چھٹے باب میں تفرقی سر کے ایک دو استعمال بھی مختصر طور پر بتائے گئے ہیں۔ اس بات کی کوشش کی گئی ہے کہ یہ کتاب اپنے حدود کے اندر مکمل ہو۔ یہ مقصد دو طرح سے حاصل ہوا ہے: ایک تو یہ کہ جو تعریفیں اور ثبوت دیے گئے ہیں وہ ریاضیاتی نقطۂ نظر سے باضابطہ اور صحیح ہیں اور اعلیٰ جماعتوں میں بھی کام دے سکتے ہیں۔ علمِ احصاء کی ابتدائی کتابوں میں عموماً یہ نقص ہوتا ہے کہ مبہم طور پر ہندسی شکلوں کی مدد سے بتادیا جاتا ہے کہ مسئلہ کا صحیح ہونا قرین قیاس ہے اور بجائے باضابطہ ثبوت دینے کے طالب علم کے وجدان سے اپیل کی جاتی ہے۔ اکثر ایسے نام نہاد "ثبوت" بھی دیے جاتے ہیں جو کسی طریقے سے ثبوت نہیں کہلائے جاسکتے۔ اس سے طالب علم میں غلط استدلال کی عادت بیٹھ جاتی ہے اور آگے چل کر صحیح استدلال کو اخذ کرنے میں دقّت ہوتی ہے۔ ریاضی کی تعلیم کے جدید نظریے کے بموجب یہ طریقہ قطعی نامناسب ہے۔ ریاضی کے کسی موضوع کے غلط پڑھانے کی بہ نسبت اس کا نہ پڑھانا زیادہ بہتر ہے۔ ہم نے اس کتاب میں کہیں ایسے ثبوت نہیں دیے ہیں جن کو آگے چل کر بھلا دینا پڑے۔ اگر بعض مقاموں پر ہندسی شکلوں سے مدد لی گئی ہے تو ان کے ساتھ باضابطہ ثبوت بھی دیے گئے ہیں۔

دوسرے یہ کہ جن عنوانوں پر بحث کی گئی ہے ان کے متعلق تمام ضروری امور بتا دیے گئے ہیں تاکہ پھر انہی عنوانوں پر اعلیٰ جماعتوں میں دوبارہ بحث کی ضرورت باقی نہ رہے۔ مثلاً انتہا، تسلسل، الجبری، مثلثی، لوکارثمی اور قوت نمائی تفاعلوں اور ان سے مرکب تفاعلوں کو تفرق کرنے کے طریقوں پر کافی مکمل بحث کی گئی ہے۔ اسی طرح معیاری تکملوں، تکملوں میں متغیر کی تبدیلی اور تکمل بالحصص کا بھی کم و بیش مکمل طور پر ذکر کیا گیا ہے۔ آخر میں تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتوں اور منحنیوں کے تماس و انحنا کو واضح طور پر بیان کیا گیا ہے۔

ہم ان تمام حضرات کے مشکور ہیں جن کے مفید مشوروں سے ہم نے اس کتاب کی تحریر کے وقت استفادہ کیا۔ ہم سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے ارباب کے بھی شکر گزار ہیں جن کی مدد اور کوشش کی وجہ سے کتاب کی طباعت میں بہت سہولت ہوئی فقط

کشن چند

رضی الدین صدیقی

فہرست مضامین

احصائے تفرقی و تکملی

مضامین	صفحات
	۹

مضامین	صفحات
مشقی سوالات (۱)	۱۳
۱ء۲۴ — ایک ثبت صحیح متغیر کے تفاعل (تواتر)	۱۶
۱ء۳ ——— تواتر کی انتہا	۱۸
۱ء۳۱ — ن مائل بہ لاتناہی کے معنے	۱۸
۱ء۳۲ — انتہا کے مفہوم کی توضیح مثالوں کے ذریعہ	۱۹
۱ء۳۳ — انتہا کی باضابطہ تعریف	۲۵
توضیحی مثالیں	۲۸
مشقی سوالات (۲)	۳۰
۱ء۴ ——— انتہا کے متعلق عام مسائل	۳۱
مشقی سوالات (۳)	۳۹
۱ء۴۷ — استدقاق کا عام اصول	۴۰
۱ء۵ ——— مسلسل متغیر کے تفاعل کی انتہا	۴۲
۱ء۵۱ — "لامائل بہ ج" کے معنی۔ تفاعل کی انتہا	۴۳
۱ء۵۲ — انتہا کی دوسری تعریف	۴۴
۱ء۵۳ — انتہا کے متعلق مسئلے	۴۹
۱ء۵۴ — مسئلہ	۵۰
۱ء۵۵ — مثالیں	۵۳
مشقی سوالات (۴)	۵۵

مضامین	صفحات

مضامین	صفحات

مضامین	صفحات

مضامین	صفحات

صفحات	مضامین

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

احصائے تفرّقی و تکملی

باب اوّل

تفاعل اور انتہا

۱ء۱۔ اعداد

۱ء۱ء۱۔ نہ صرف ابتدائی ریاضی میں بلکہ روزمرّہ زندگی میں بھی ہم کو عددوں سے اکثر سابقہ پڑتا ہے اور اس لیے بحث کی ابتداء میں ہم مان لیتے ہیں کہ طالب علم کو ابتدائی ریاضی کے اعداد یعنے اعداد صحیح اور کسر سے خواہ وہ مثبت ہوں یا منفی، کافی واقفیت ہے۔

اعداد کی اس جماعت کو جس میں تمام صحیح اور مکسور، مثبت اور منفی عدد شامل ہوں ہم اعداد کی "منطق" جماعت کہتے ہیں اور اس جماعت کے کسی فرد کو "منطق" عدد کہتے ہیں۔ ابتدائی ریاضی سے ہمیں یہ معلوم ہے کہ یہ منطق جماعت ذیل کی خاصیتیں رکھتی ہے:-

(۱) کسی دو منطق عددوں کا حاصل جمع ایک منطق عدد ہے۔

(۲) کسی دو منطق عددوں کا فرق ایک منطق عدد ہے۔

(۳) کسی دو منطق عددوں کا حاصل ضرب ایک منطق عدد ہے۔

(۴) کسی دو منطق عددوں کا خارج قسمت ایک منطق عدد ہے۔

ایک منطق عدد کو عام سے عام طور پر $\frac{ف}{ق}$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جس میں ہم مان لیتے ہیں کہ ف اور ق مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں۔

۲ ء ۱ - اکثر اوقات ہم کو ایسے عددوں سے بھی سابقہ پڑتا ہے جو منطق نہیں ہیں یعنے جو ایک کسر $\frac{ف}{ق}$ کی شکل میں کبھی نہیں تعبیر کیے جا سکتے۔ اس کی ایک آسان مثال کے طور پر ہم اُس عدد پر غور کرتے ہیں جس کا مربع ۲ ہے یعنے بالفاظِ دیگر ہم ۲ کے جذر المربع پر غور کرتے ہیں جس کو بالعموم $\sqrt{۲}$ لکھا جاتا ہے۔ بفرضِ محال ہم مان لیتے ہیں کہ $\sqrt{۲} = \frac{ف}{ق}$ جہاں ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ ف اور ق دو مثبت صحیح عدد ہیں جن میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہیں ورنہ ہم انہیں تقسیم کے ذریعے خارج کر دیتے۔

$$\text{پس}\quad \frac{ف^۲}{ق^۲} = ۲ \quad \text{یعنے}\quad ف^۲ = ۲ ق^۲ \quad\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس سے ظاہر ہے کہ ف^۲ ایک جفت عدد ہے۔ اس لیے ف بھی ایک جفت عدد ہونا چاہیے کیونکہ کسی طاق عدد کا مربع جفت نہیں ہو سکتا۔

$$\text{پس}\quad ف = ۲ م \quad\ldots\ldots\ldots (۲)$$

جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ اس کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$۲ ق^۲ = ف^۲ = (۲ م)^۲ = ۴ م^۲$$

$$\text{یعنے}\quad ق^۲ = ۲ م^۲ \quad\ldots\ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ ق^۲ بھی ایک جفت عدد ہے اور اس لیے ق بھی ایک جفت عدد ہے۔

ق = ۲ ن .... (۴)

جہاں ن ایک ثبت صحیح عدد ہے۔
مساواتوں (۲) اور (۴) سے ظاہر ہے کہ ف اور ق میں ایک مشترک جزوِ ضربی ۲ ہے جو مفروض کے خلاف ہے۔ $\sqrt{2}$ کو ایک منطق عدد $\frac{ف}{ق}$ کے مساوی ماننے کی وجہ سے یہ تضاد حاصل ہو رہا ہے اس لیے یہ نتیجہ ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\sqrt{2}$ کوئی منطق عدد نہیں ہے یعنے $\sqrt{2}$ کو ہم ایک کسر عام یا ایک محدود کسر اعشاریہ کی شکل میں تعبیر نہیں کر سکتے۔ صرف $\sqrt{2}$ ہی ایک ایسا عدد نہیں ہے بلکہ ایسے بے شمار عدد ہیں جو ایک کسر عام یا ایک محدود کسر اعشاریہ کی شکل میں نہیں لکھے جا سکتے۔ ان کی چند مثالیں $\sqrt{3}$، $\sqrt[3]{4}$، $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ وغیرہ ہیں۔

ایسے تمام اعداد کو جو منطق نہیں ہیں یعنے ایک کسر $\frac{ف}{ق}$ کی شکل میں نہیں لکھے جا سکتے ہم "غیر منطق عدد" کہتے ہیں۔ عددوں کی وہ جماعت جس میں تمام منطق عدد اور تمام غیر منطق عدد شامل ہیں اعداد کی "حقیقی جماعت" کہلاتی ہے اور اس جماعت کے کسی فرد کو ہم "حقیقی عدد" کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ایک حقیقی عدد منطق یا غیر منطق کچھ بھی ہو سکتا ہے۔

غیر منطق عددوں کی دو بڑی قسمیں ہوتی ہیں:- ایک وہ غیر منطق عدد جن کی مثالیں اوپر دی جا چکی ہیں یعنے $\sqrt{2}$، $\sqrt[3]{2}$ وغیرہ، ظاہر ہے کہ $\sqrt{2}$ جبری مساوات $لا^2 - 2 = 0$ کی ایک اصل ہے۔ اسی طرح $\sqrt[3]{2}$ جبری مساوات $لا^3 - 2 = 0$ کی ایک اصل ہے۔ وہ غیر منطق عدد جو کسی جبری مساوات کی اصلیں ہوں خواہ یہ مساوات کسی درجہ کی ہو ان عددوں کو جبری عدد کہتے ہیں۔ پس $\sqrt{2}$، $\sqrt[3]{2}$ وغیرہ جبری عدد ہیں۔ لیکن بعض غیر منطق عدد ایسے ہیں جو کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہیں مثلاً π،

یعنے کسی دائرہ کے محیط اور قطر کی نسبت، ایک غیر منطق عدد ہے جو کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہے۔ ایسے عددوں کو "ماورائے علاد" کہتے ہیں۔ آگے چل کر طالب علم کو اور دوسرے ماورائی عددوں سے سابقہ پڑیگا۔

۱۳ء۱۔ ہم ایک خطِ مستقیم لیتے ہیں جس کو ہم دونوں طرف جس قدر چاہیں خارج کیا ہوا مان لیتے ہیں۔ اس خط پر ہم کوئی نقطہ $\text{ا}_{\cdot}$ مقرر کر لیتے ہیں اور $\text{ا}_{\cdot}$ سے کسی مناسب پیمانہ پر ایک حصہ $\text{ا}_{\cdot}\text{ا}_{1}$ کاٹ لیتے ہیں۔

$$\text{ا}_{-\text{م}-1} \quad \text{ا}_{-\text{م}} \quad \cdots \quad \text{ا}_{-1} \quad \text{ا}_{\cdot} \quad \text{ا}_{1} \quad \text{ا}_{2} \quad \cdots \quad \text{ا}_{\text{ں}} \quad \text{ا}_{\text{ں}+1}$$

نقطہ $\text{ا}_{\cdot}$ کو ہم صفر سے اور ا_{1} کو ۱ سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اس خط پر ہم بہت سے نقطے

$$\ldots \text{ا}_{-\text{م}-1}،\ \text{ا}_{-\text{م}}،\ \ldots،\ \text{ا}_{-1}،\ \text{ا}_{\cdot}،\ \text{ا}_{1}،\ \ldots،\ \text{ا}_{\text{ں}}،\ \text{ا}_{\text{ں}+1}\ldots$$

ایسے معین کرتے کہ اگر ان حصوں کو بائیں جانب سے سیدھی جانب ناپا جائے تو

$$\ldots = \text{ا}_{-\text{م}-1}\text{ا}_{-\text{م}} = \ldots = \text{ا}_{-1}\text{ا}_{\cdot} = \text{ا}_{\cdot}\text{ا}_{1} = \ldots = \text{ا}_{\text{ں}}\text{ا}_{\text{ں}+1} = \ldots$$

تب ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ں کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$\frac{\text{ا}_{\cdot}\text{ا}_{\text{ں}}}{\text{ا}_{\cdot}\text{ا}_{1}} = \text{ں} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

اب ہم یہ مان لیتے ہیں کہ طول ایک ایسی مقدار ہے جس کی علامت مثبت ہوتی ہے اگر طول کو بائیں سے سیدھی جانب ناپا جائے اور جس کی علامت منفی ہوتی ہے اگر طول کو سیدھی سے بائیں جانب ناپا جائے یعنے $\text{ا}_{\cdot}\text{ا}_{1}$ مثبت اور $\text{ا}_{1}\text{ا}_{\cdot}$ منفی جس سے ملتا ہے کہ $\text{ا}_{1}\text{ا}_{\cdot} = -\text{ا}_{\cdot}\text{ا}_{1}$ - پس

$$\frac{\text{ا ا}_{\text{ن}}}{\text{ا ا}_{\text{۱}}} = - \frac{\text{ا}_{\text{ن}}\text{ ا}}{\text{ا ا}_{\text{۱}}} = -\text{ن}$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۱) ن کی تمام مثبت یا منفی صحیح عددی قیمتوں کے لیے درست ہے۔

اب ہم ایک مثبت کسر واجب $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ لیتے ہیں اور مان لیتے ہیں کہ ف اور ق ایسے مثبت صحیح عدد ہیں جن میں کوئی مشترک جزوِ ضربی نہیں ہے اور ف < ق۔ طول ا ا۱ کو ہم ق مساوی حصوں میں تقسیم کرتے ہیں تو ظاہر ہے کہ ان نقاطِ تقسیم کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے:—

$$\text{ا، ا}_{\frac{\text{۱}}{\text{ق}}}\text{، ...، ا}_{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}\text{، ...، ا}_{\frac{\text{ق-۱}}{\text{ق}}}\text{، ا}_{\text{۱}}$$

اس سے ہم فوراً دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{\text{ا ا}_{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{ا ا}_{\text{۱}}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}} \quad \text{..........(۲)}$$

اس طرح سے ہم کو خطِ مستقیم پر وہ تمام نقطے مل جاتے ہیں جو کسورِ واجب $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ کو تعبیر کرتے ہیں۔

غیر واجب کسروں کو ہم $(\text{ن} + \frac{\text{ف}}{\text{ق}})$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جس میں ن ایک مثبت صحیح عدد اور $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ ایک کسرِ واجب ہے۔ اگر ہم خط پر ایک نقطہ $\text{ا}_{\text{ن}+\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ نقاط $\text{ا}_{\text{ن}}$ اور $\text{ا}_{\text{ن+۱}}$ کے درمیان اس طرح لیں کہ

$\text{ا}_{\text{ن}}\,\text{ا}_{\text{ن}+\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} = \text{ا}.\text{ا}_{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ تو ظاہر ہے کہ $\dfrac{\text{ا}.\text{ا}_{\text{ن}+\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{ا}.\text{ا}_{۱}} = \text{ن} + \dfrac{\text{ف}}{\text{ق}}$ ۔

اس طرح اگر ہم ن، ف اور ق کی تمام ممکنہ مثبت صحیح قیمتوں کے لیے نقاط $\text{ا}_{\text{ن}+\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}$ معلوم کرلیں تو ہم کو تمام مثبت صحیح یا کسری عددوں س کے جواب میں ایک نقطہ $\text{ا}_{\text{س}}$ مل جائیگا جس کے لیے

$$\frac{\text{ا}.\text{ا}_{\text{س}}}{\text{ا}.\text{ا}_{۱}} = \text{س} \qquad (۳)$$

اب اگر (-س) ایک واجب یا غیر واجب منفی کسر ہے تو خط پر ہم ایک نقطہ $\text{ا}_{-\text{س}}$ ایسا لیتے ہیں کہ $\text{ا}_{-\text{س}}\,\text{ا} = \text{ا}.\text{ا}_{\text{س}}$ یعنے

$$\frac{\text{ا}.\text{ا}_{-\text{س}}}{\text{ا}.\text{ا}_{۱}} = -\frac{\text{ا}.\text{ا}_{\text{س}}}{\text{ا}.\text{ا}_{۱}} = -\text{س}$$

اس طرح ہم کو تمام منطق عددوں ر کے جواب میں ایک نقطہ $\text{ا}_{\text{ر}}$ ایسا مل جاتا ہے کہ

$$\frac{\text{ا}.\text{ا}_{\text{ر}}}{\text{ا}.\text{ا}_{۱}} = \text{ر} \qquad (۴)$$

اب اگر ہم حصۂ $\text{ا}.\text{ا}_{۱}$ کو طول کی اکائی مان لیں تو

$$\text{ا}.\text{ا}_{\text{ر}} = \text{ر} \qquad (۵)$$

یہ بآسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ ہر غیر منطق عدد، دو منطق عددوں کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ مثلاً $\sqrt{۲}$ جو غیر منطق ہے ۱٫۴ اور ۱٫۵ کے درمیان واقع ہے یا π جو ایک ماورائی عدد ہے ۳٫۱ اور ۳٫۲ کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ خطِ مستقیم پر اگر $\text{ا}.\text{ا} = ۱٫۴$ اور $\text{ا}.\text{ب} = ۱٫۵$ تو

ا اور ب کے درمیان ایک نقطۂ ج ایسا موجود ہے کہ اج = ۲√
اس طرح اگر اد = ۱؍۳ اور ای = ۳؍۲ تو نقاط د اور ی کے
درمیان ایک نقطہ ف ایسا ہے کہ اف = π
غرض ہم مان لیتے ہیں کہ ایک خط مستقیم پر کے نقطوں سے
تمام حقیقی اعداد کی جماعت کو اس طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے کہ
ہر حقیقی عدد کے جواب میں چاہے وہ منطق ہو یا غیر منطق خطِ مستقیم پر
ایک اور صرف ایک نقطہ ملتا ہے اور اس کے برعکس خطِ مستقیم پر کا
ہر نقطہ ایک اور صرف ایک حقیقی عدد کے جواب میں ہے ۔

۱؍۲ ۔ تفاعل ۔

۱؍۲۱ ۔ مستقل اور متغیر مقداریں ۔۔ حقیقی اعداد پر

ہم دو طرح سے غور کر سکتے ہیں ایک تو یہ کہ ہم ان میں سے کسی ایک
خاص حقیقی عدد کو لیں مثلاً ۱/۲ ، یا - ۳/۴ یا ۶√ یا π - ان اعداد کی
قیمت کسی سوال میں اور بالعموم ہمیشہ وہی ایک رہتی ہے اور ان میں
کوئی تبدیلی نہیں ہوتی - بعض وقت ایسا ہوتا ہے کہ کسی مقدار کی
ٹھیک قیمت ہمارے لیے غیر اہم ہے - ہم اس قیمت کو جو چاہیں
فرض کر سکتے ہیں لیکن ایک مرتبہ کوئی قیمت فرض کر لینے کے بعد
بحث کے ختم ہونے تک ہم اس قیمت کو نہیں بدل سکتے ۔ ایسی
مقداروں کو ہم حروف تہجی کے پہلے چند حرفوں ا ، ب ، ج ، وغیرہ سے
تعبیر کرتے ہیں ۔ ان کی قیمت ایک مسئلہ یا ایک سوال کے دوران میں
نہیں بدلتی ۔ ایسی مقدار کو ہم "مستقل" کہتے ہیں ۔

لیکن علمِ ریاضی میں ہم کو اکثر ایسی مقداروں سے بھی سابقہ
پڑتا ہے جو ایک ہی مسئلہ کے دوران میں چند یا بہت سی قیمتوں
میں سے ہر ایک قیمت اختیار کر سکتی ہیں ۔ ایسی مقداروں کو بالعموم
لا ، ہا ، ی ، وغیرہ ، سے تعبیر کرتے ہیں ۔ مثلاً اگر ہم سال کا لا واں ہیسنہ

کہیں تو اس میں لا کی قیمت ۱ سے ۲ تک کچھ ہی ہو سکتی ہے۔ اس طرح ہم ہفتہ کا لا واں دن، جماعت کا لا واں طالب علم، وغیرہ، کہہ سکتے ہیں۔ ایسی مقادیر کو "متغیر مقادیر" کہتے ہیں۔ اگر ایک متغیر مقدار لا دو حقیقی عددوں مثلاً صفر اور ۱ کے درمیان کی ہر حقیقی قیمت کو اختیار کر سکے تو لا کو "مسلسل متغیر" کہتے ہیں۔ مسلسل متغیروں کے علاوہ علمِ احصاء میں ہم کو ایسے متغیروں سے بھی سابقہ پڑتا ہے جو صرف ثبت صحیح عددی قیمتیں ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰، .. اختیار کر سکتے ہیں اس قسم کے متغیروں کو بالعموم ن سے تعبیر کرتے ہیں اور ان کو "غیر مسلسل متغیر" کہتے ہیں۔

۱۔۲۲ دو متغیروں لا اور ما پر غور کرو۔ فرض کرو کہ ان دونوں میں سے کسی ایک کو اگر ہم کوئی خاص قیمت دیں تو دوسرے متغیر کی اس کے جواب میں ایک معین قیمت حاصل ہوتی ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ لا اور ما دو مسلسل متغیر ہیں جن کو ہم بالترتیب دو خطوط مستقیم پر فاصلوں ا ف = لا اور ب ق = ما سے تعبیر کرتے ہیں۔ اب اگر نقاط ف اور ق کے مقام بالکل ایک دوسرے سے آزاد نہ ہوں بلکہ ایک رشتے سے مربوط ہوں تو ہم سمجھ سکتے ہیں کہ یہ لا اور ما میں ایک رشتہ ہے۔ اس طرح اگر ہم کو نقطہ ف اور عدد لا معلوم ہوں تو اس رشتہ کی مدد سے نقطہ ق اور عدد ما معلوم ہو جاتے ہیں۔ مثلاً ہم فرض کر سکتے ہیں کہ ما = لا یا ما = ۲ لا یا ما = $\frac{1}{2}$ لا یا ما = لا^2 + ۱۔ ان تمام مثالوں میں ما کی قیمت معین ہو جاتی ہے اگر لا کی قیمت معلوم ہو۔ لیکن یہ ضروری نہیں ہے کہ ما کی قیمت لا میں ایک جبری جملے کی شکل میں دی ہوئی ہو جیسا کہ اوپر کی مثالوں میں کیا گیا ہے بلکہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی قیمت ایک جدول کی شکل میں دی جا سکتی ہے۔ مثلاً ۱۹۰۰ء سے اب تک کسی شہر کی آبادی ہر سال کے لیے ایک جدول کی شکل میں لکھی جائے یا کسی مقام پر بار پیما کی بلندی دیکھی جائے اور اس کو جدول میں مقام کے

بازو لکھ دیا جائے۔

ان تمام حالتوں میں یعنے اس وقت جبکہ دو متغیروں لا اور ما میں سے ایک متغیر لا کی متعدد قیمتوں کے جواب میں دوسرے متغیر ما کی متعدد قیمتیں حاصل ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ ما ایک "تفاعل" ہے لا کا۔ اس میں لا کو "متغیر متبوع" اور ما کو "متغیر تابع" کہتے ہیں۔

تفاعل کے مفہوم سے متعلق چند مثالیں طالب علم کو علم ہندسہ میں معلوم ہوچکی ہونگی۔ مثلاً اگر ہم ایک دائرہ کے محیط کے طول پر غور کریں تو معلوم ہوتا ہے کہ دائرہ کے نصف قطر کے بدلنے سے محیط کے طول میں بھی تبدیلی ہوتی ہے اور کسی نصف قطر لا کے جواب میں ہم کو محیط کا طول ما ذیل کے رشتہ سے حاصل ہوتا ہے:-

ما = ۲ ۲ لا

اس صورت میں ہم دائرہ کے نصف قطر کو متغیر متبوع اور محیط کے طول کو متغیر تابع کہتے ہیں۔ اور اس رشتہ کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ کسی دائرہ کے محیط کا طول اس کے نصف قطر کا ایک تفاعل ہے۔ بطور ایک دوسری مثال کے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک مستقل قاعدے والے مثلث کا رقبہ ارتفاع کے ساتھ ساتھ بدلتا رہتا ہے۔ اس لیے اگر مثلث کے رقبہ کو ہم متغیر تابع ما سے اور ارتفاع کو متغیر متبوع لا سے تعبیر کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثلث کا رقبہ ارتفاع کا ایک تفاعل ہے اور اس کو لکھتے ہیں

ما = ½ ا لا

جہاں ا مستقل قاعدہ ہے۔

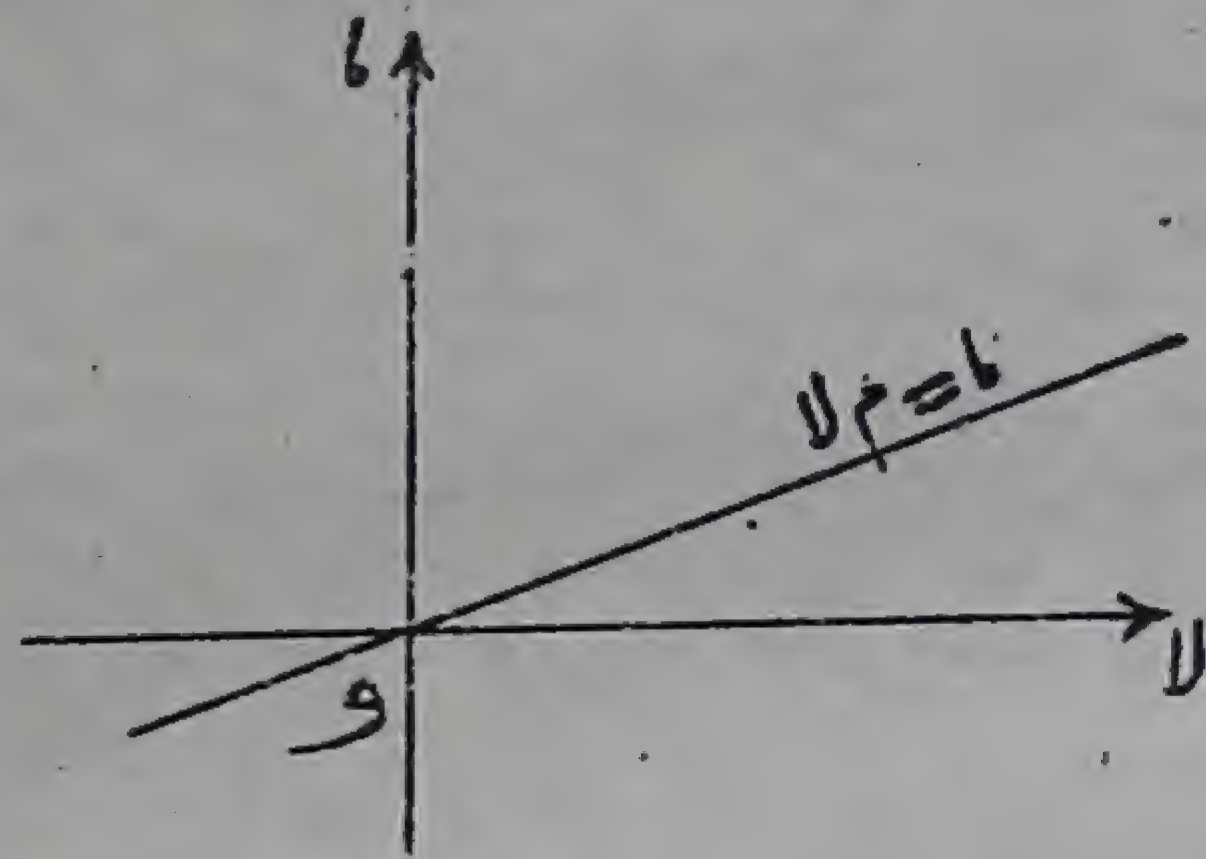
۱ء۲۳- **چند سادہ تفاعل اور ان کی ترسیم** — تفاعل کے مفہوم کو واضح کرنے کی خاطر ہم چند سادہ تفاعلوں پر غور کرینگے۔

سب سے پہلی مثال کے طور پر ہم تفاعل

ما = م لا

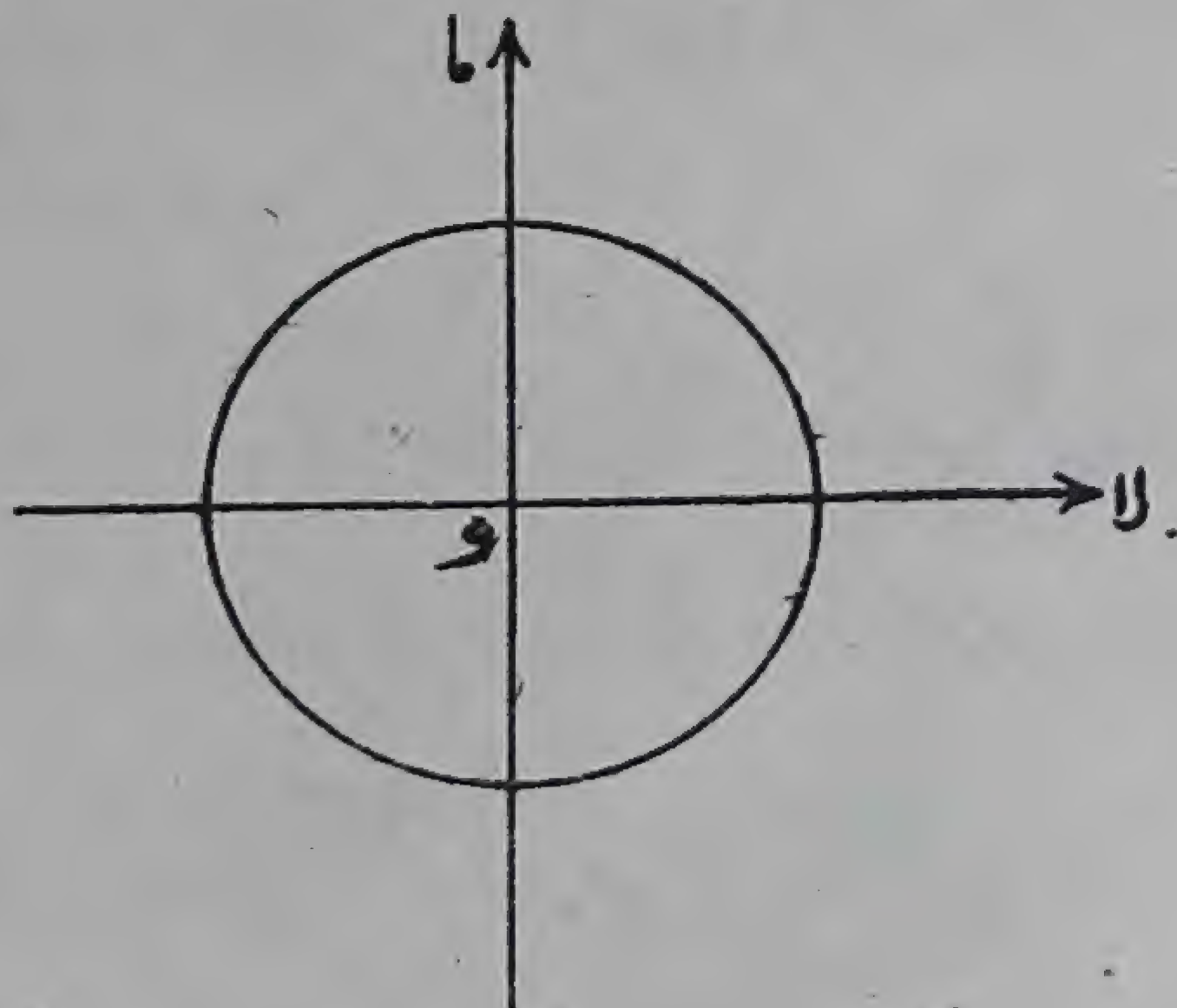
پر غور کرتے ہیں۔ علم ہندسۂ تحلیلی سے ہمیں معلوم ہے کہ یہ مساوات ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبداء میں سے گزرتا ہے اور جو محور لا کے ساتھ ایسا زاویہ طہ بناتا ہے کہ

مس طہ = م

ما
ما = م لا
و
لا

اس میں ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل م لا کی ترسیم ایک خطِ مستقیم ہے۔ اس کے علاوہ ہمیں یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ محور ما کے متوازی کوئی خط اس خط کو صرف ایک ہی نقطہ پر کاٹتا ہے۔ بالفاظِ دیگر لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی صرف ایک ہی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ ایسے تفاعلوں کو "یک قیمتی" کہتے ہیں۔

برخلاف اس کے اس تفاعل ما پر غور کرو جو ذیل کے جملے سے حاصل ہوتا ہے

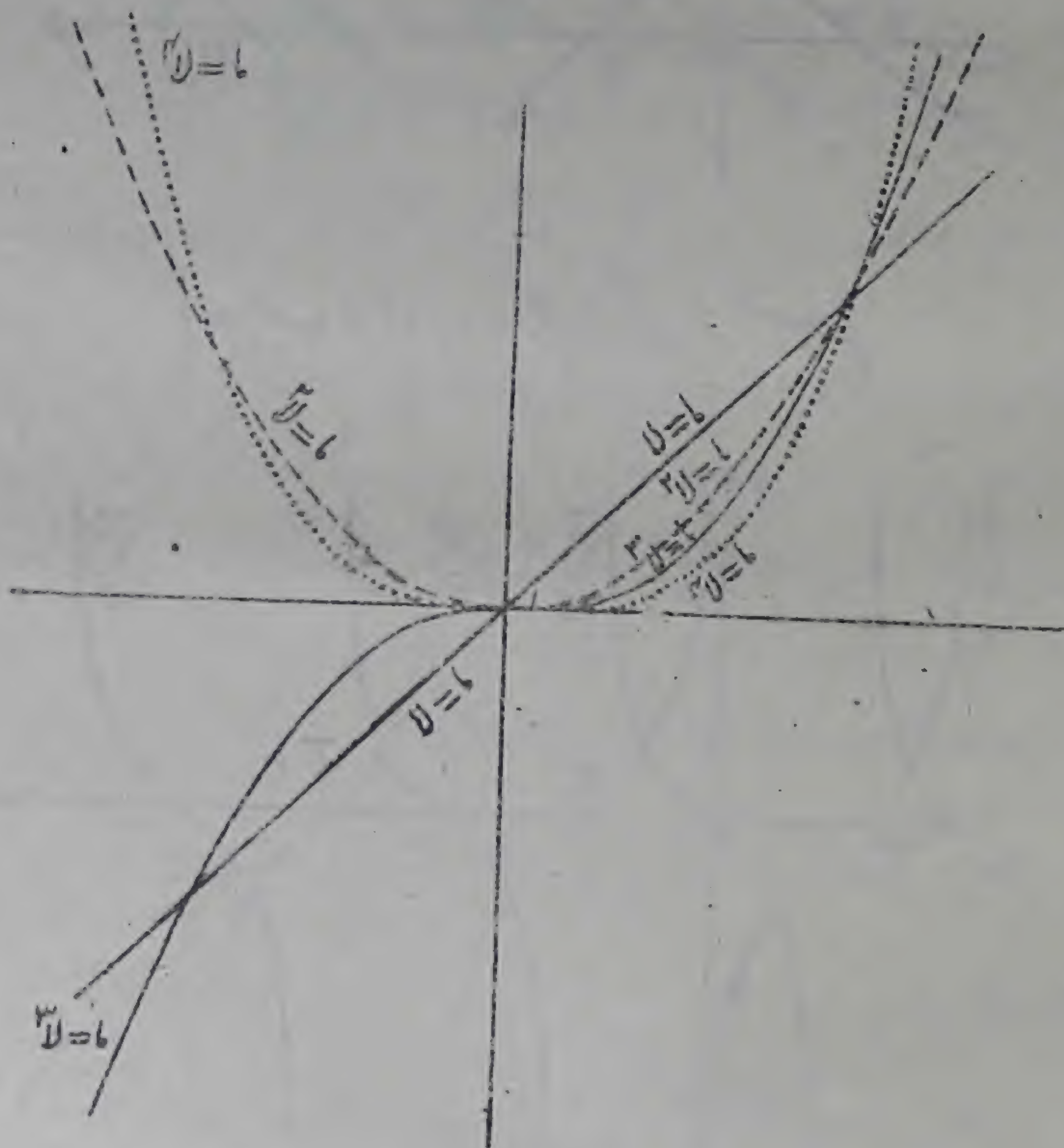
$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 1$$

ما
و
لا

ہندسۂ تحلیلی سے ہم کو معلوم ہے کہ یہ مساوات ایک دائرہ کو تعبیر

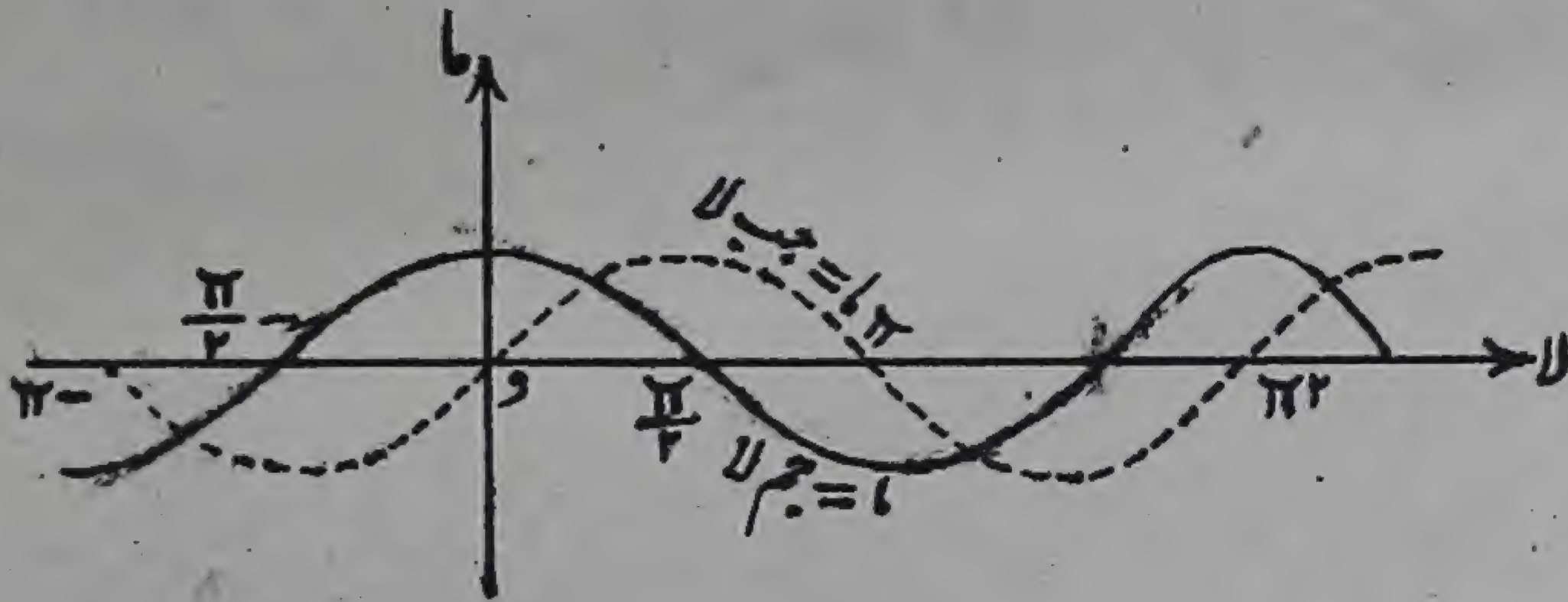
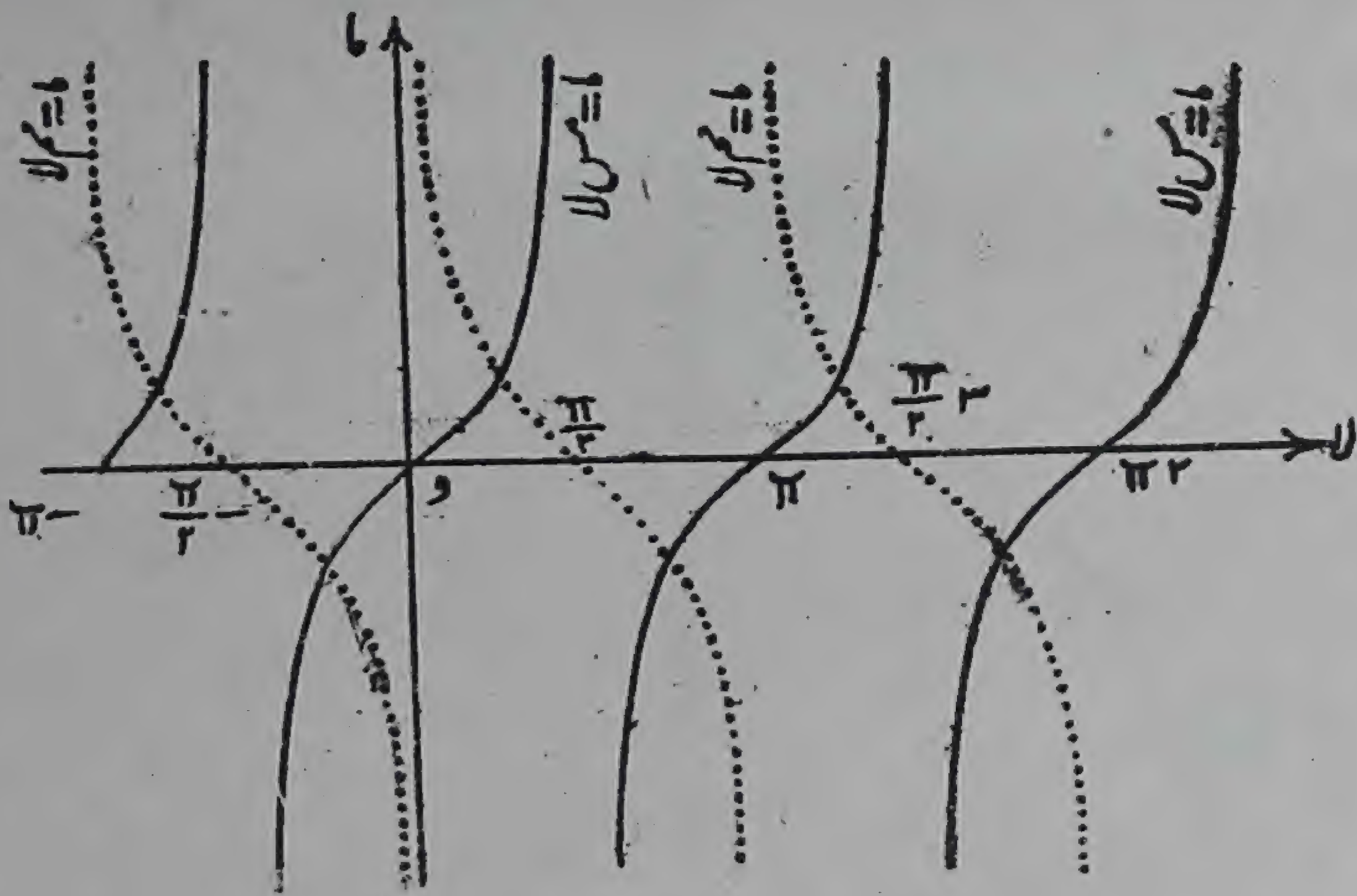
کرتی ہے جس کا مرکز مبداء پر واقع ہے اور نصف قطر ا ہے۔ اب یہ آسانی سے دیکھا جا سکتا ہے کہ لا کی کسی قیمت کے لیے اس دائرہ کی مساوات سے ما کی دو مساوی لیکن مختلف العلامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:—

$$\text{ما} = \pm \sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}$$

ایسے تفاعلوں کو جو متغیر متبوع کی ایک قیمت کے لیے ایک سے زیادہ مختلف قیمتیں اختیار کرتے ہیں "بسیار قیمتی" تفاعل کہتے ہیں۔

ذیل کی شکل میں ہم مقابلے کی خاطر ما = لا$^{\text{ن}}$ کی ترسیمیں دیتے ہیں جبکہ ن = ۱، ۲، ۳، ۴۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ما = لا اور ما = لا$^{\text{۳}}$ میں لا کی منفی قیمتوں کے

جواب میں ما کی منفی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن ما = لا² اور ما = لا⁴ میں لا کی منفی اور مثبت دونوں قیمتوں کے لیے ما کی مثبت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اول الذکر تفاعلوں کو "طاق تفاعل" اور آخر الذکر کو "جفت تفاعل" کہتے ہیں۔ یہ تمام تفاعل جبری تفاعل ہیں۔

لیکن طالب علم کو ان کے علاوہ ایک دوسری قسم کے تفاعلوں سے بھی واقفیت ہے جن کو "مثلثی تفاعل یا مستدیر تفاعل" کہتے ہیں۔ ذیل کی شکلوں میں ہم جب لا، جم لا، مس لا اور مم لا کی ترسیمیں دیتے ہیں۔

ما = جب لا اور ما = جم لا کی ترسیم

ما = مس لا اور ما = مم لا کی ترسیم

عام سے عام صورت میں جبکہ تفاعل کے مفہوم کو ظاہر کرنا ہو یعنے یہ بتانا مقصود ہو کہ ایک متغیر ما دوسرے متغیر لا کا تفاعل ہے تو ہم ذیل کی ترقیم اختیار کرتے ہیں:-

ما = ف (لا) یا ما = فہ (لا) یا ما = فا (لا)، وغیرہ۔

مثلاً اگر ما = لا^۳ پر بحث کریں تو ف اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ متغیر تابع متغیر متبوع کے مکعب کے مساوی ہے۔ اور اگر ما = جم لا پر غور کریں تو ف اس بات کو تبلاتا ہے کہ متغیر تابع متغیر متبوع کے جیب التمام کے مساوی ہے۔

مشقی سوالات ۱

(۱) اگر ف (لا) = ۲ لا^۳ - ۳ لا^۲ + ۵ لا + ۴ تو ف (۱)، ف (۲)، ف (۰)، ف (-۱) اور ف (-۵) کی قیمتیں دریافت کرو اور تفاعل کی ترسیم کرو۔

(۲) اگر ف (لا) = $\frac{(\text{لا}-1)(5-\text{لا})}{(\text{لا}+1)^2}$ تو ف (۲)، ف (۱)، ف (۰)، ف ($\frac{11}{1}$)، ف (-۱)، ف (-۲) کی قیمتیں معلوم کرو اور تفاعل کی ترسیم کرو۔

(۳) اگر ف (لا) = (لا^۲ - ۱) (لا^۲ - ۴) تو ثابت کرو کہ ف (۱)، ف (-۱)، ف (۲)، ف (-۲) سب صفر ہیں۔ تفاعل کی ترسیم کے ذریعہ اس کی تصدیق کرو۔

(۴) اگر ف (لا) = ا لا^۲ + ب لا + ج تو ف (لا + ۱)، ف (لا - ۱) اور ف (لا + ھ) - ف (لا) کی قیمتیں معلوم کرو۔

(۵) ما^۲ = $\frac{\text{لا}^2(4-\text{لا})}{4+\text{لا}}$ کی ترسیم کرو۔ نقطۂ لا = -۳ پر تفاعل کی کیا قیمت ہے۔

(۶) ما = $\frac{\text{لا}^2-9}{\text{لا}-3}$ کی ترسیم کرو اور نقطہ لا = ۳ پر تفاعل کی قیمت معلوم کرو۔

(۷) ما = جب (لا - π/۴)، ما = ۲ جب² لا، ما = ۱ + جم ۲ لا کی ترسیم کرو۔

(۸) ما = جب لا + جم لا اور ما = جب لا - جم لا کی ترسیم کرو۔

(۹) ما² = لا² (لا + ۳)/(۳ - لا) اور ما² = لا² (لا + ۳)/(لا - ۳) کی ترسیم کرو۔

(۱۰) ما = ½ لا - ۲/لا + ۱ کی ترسیم کرو۔

(۱۱) اگر ف (لا) = لا² - ۳لا + ۲ تو ف (۲)، ف (½) اور ف (√۲) معلوم کرو۔

(۱۲) اگر ف (لا) = لا + √(۱ - لا²) تو ف (۱) اور ف (۰) معلوم کرو۔

(۱۳) اگر ف (لا) = (جب لا - جم لا)/(جب لا + جم لا) تو ف (π/۳) معلوم کرو۔

(۱۴) اگر ف (لا) = (جب لا + مس لا)/(جم لا + حم لا) تو ف (π/۶) معلوم کرو۔

(۱۵) اگر ف (لا) = لا² - ۲ + ۱/لا تو ف (۲) اور ف (۱/لا) معلوم کرو۔

(۱۶) اگر ف (لا) = ۲ لا² - ۳ لا + ۱/لا تو ف (۲) اور ف (ما + ۱) معلوم کرو۔

(۱۷) اگر ف (لا) = لا² + لا + ۱ تو ف (لا + ھ) - ف (لا) معلوم کرو۔

(۱۸) اگر ف (لا) = ۱/لا تو [ف (۱ + ھ) - ف (۱)]/ھ معلوم کرو۔

(۱۹) اگر ف (لا) = (لا + ۳) (۳ - لا) تو ثابت کرو کہ ف (-لا) = ف (لا)

(۲۰) اگر ف (لا) = (۱ + لا²)/لا تو ثابت کرو کہ ف (۱/لا) = ف (لا)

(۲۱) اگر ف (لا) = ا لا⁶ + ب لا⁴ + ج لا² + د تو ثابت کرو کہ ف (لا) = ف (-لا)
اور اگر ف (لا) = ا لا⁷ + ب لا⁵ + ج لا³ + د لا تو ثابت کرو کہ ف (-لا) = -ف (لا)

(۲۲) اگر ف (لا) = لا² + ۱ تو [ف (لا + ۱) + ف (لا - ۱) - ۲ ف (لا)]/[ف (لا + ۱) - ف (لا - ۱)] معلوم کرو۔

(۲۳) اگر ما = ف (لا) = (لا + ۱)/(۲ لا + ۳) تو ثابت کرو کہ ف (ما) = (۳ لا + ۴)/(۸ لا + ۱۱)

(۲۴) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \text{ب}\,\frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ب} - \text{ا}} + \text{ا}\,\frac{\text{لا} - \text{ب}}{\text{ا} - \text{ب}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ا} + \text{ب})$$

(۲۵) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \frac{(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا} - \text{ب})}{(\text{ج} - \text{ا})(\text{ج} - \text{ب})} + \frac{(\text{لا} - \text{ب})(\text{لا} - \text{ج})}{(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ج})} + \frac{(\text{لا} - \text{ج})(\text{لا} - \text{ا})}{(\text{ب} - \text{ج})(\text{ب} - \text{ا})}$

تو ثابت کرو کہ $\text{ف}(\text{ا}) = \text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ج}) = \text{ف}(۰)$

(۲۶) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{ب ج}(\text{لا} - \text{ا})^{۲}}{(\text{ا} - \text{ب})(\text{ا} - \text{ج})} + \frac{\text{ج ا}(\text{لا} - \text{ب})^{۲}}{(\text{ب} - \text{ج})(\text{ب} - \text{ا})} + \frac{\text{ا ب}(\text{لا} - \text{ج})^{۲}}{(\text{ج} - \text{ا})(\text{ج} - \text{ب})}$

تو ثابت کرو کہ $\text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}(\text{ب}) + \text{ف}(\text{ج}) = \text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲}$

(۲۷) اگر $\text{ا} = \text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{ا لا} + \text{ب}}{\text{ج لا} - \text{ا}}$ تو ثابت کرو کہ $\text{لا} = \text{ف}(\text{ما})$

۱ء۲۴ - ایک مثبت صحیح متغیر کے تفاعل (تواتر)

گزشتہ دفعہ میں ہم نے ایک مسلسل متغیر لا کے تفاعلوں کی بہت سی مثالیں پیش کی ہیں - طالب علم کو یاد ہوگا کہ ہم نے مسلسل متغیر کی تعریف میں یہ شرط لگائی تھی کہ لا کسی دو حقیقی عددوں کے درمیان کی ہر حقیقی قیمت کو اختیار کرے - اب ہم ایسے تفاعلوں پر غور کرتے ہیں جن کے متغیر متبوع صرف مثبت صحیح عددی قیمتوں کو اختیار کرتے ہیں - پس متبوع متغیر ایک غیر مسلسل متغیر ہے اور اس کو ہم بالعموم ن سے تعبیر کرتے ہیں - اس کے تفاعلوں کو ہم فہ (ن) سے تعبیر کرینگے - متبوع متغیر ن کی قیمتیں صرف ۱، ۲، ۳، ...، ۱۰۰، ... یعنے صرف مثبت صحیح عدد ہو سکتی ہیں - ن کبھی منفی قیمت یا کسری یا غیر منطق قیمت نہیں اختیار کرتا - اس قسم کے تفاعلوں کی چند مثالیں حسب ذیل ہیں :-

(۱) پہلے ن طبعی اعداد کا مجموعہ :

$$س_۱(ن) = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ن = \frac{ن(ن+۱)}{۲}$$

(۲) پہلے ن طبعی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ :

$$س_۲(ن) = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + ن^۲ = \frac{ن(ن+۱)(۲ن+۱)}{۶}$$

(۳) پہلے ن طبعی اعداد کا حاصل ضرب

$$\underline{|ن} = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \cdots \times ن$$

(۴) ن اشیا میں سے ک اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد (ک مستقل ہے)

$$ح_{ن ک} = (ن_ک) = \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)\cdots(ن-ک+۱)}{\underline{|ک}} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ک}\ \underline{|ن-ک}}$$

تواتر — اگر ہمیں یکے بعد دیگرے بے شمار اعداد

$$ا_۱، ا_۲، ا_۳، \ldots، ا_ن \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اس طرح دیے ہوئے ہوں کہ

(۱) ان میں کا سب سے پہلا عدد $ل_۱$ معلوم ہو اور

(۲) ہر ن ویں عدد $ل_ن$ کے بعد ایک (ن+۱) واں عدد $ل_{ن+۱}$ معلوم کر سکیں تو عددوں کی ترتیب (۱) کو ہم "تواتر" کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ تواتر (۱) دراصل ایک مثبت صحیح متغیر ن کا تفاعل ہے۔ تواتر کا یہ مفہوم چند سادہ مثالوں کے ذریعے بخوبی ذہن نشین ہو جائیگا۔

مثال ۱۔ $ل_ن = \frac{۱}{ن}$

اس تواتر کا پہلا عدد $\frac{۱}{۱}$ یعنے ایک ہے اور جو کوئی دوسرا عدد چاہیں آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

$$۱، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۴}، \dots، \frac{۱}{۱۰۰}، \dots، \frac{۱}{۹۹۹}، \dots$$

مثال ۲۔ $ل_{۲م} = \frac{۱}{م}،\ ل_{۲م-۱} = \frac{۱}{۲م}$

اس تواتر کا پہلا عدد $\frac{۱}{۲}$ ہے، ہر جفت عدد ایک کسر ہے جس کا شمار کنندہ ۱ اور نسب نما اس جفت عدد کے نصف کے مساوی ہے۔ ہر طاق عدد ایک کسر ہے جس کا شمار کنندہ ۱ اور نسب نما اس کے بعد والے جفت صحیح عدد کے مساوی ہے۔ یعنے تواتر حسب ذیل ہے۔

$$\frac{۱}{۲}، ۱، \frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۶}، \frac{۱}{۳}، \frac{۱}{۸}، \frac{۱}{۴}، \dots\dots$$

مثال ۳۔ $ل_ن = \frac{ن}{ن+۱}$

اس تواتر کا پہلا عدد $\frac{۱}{۱+۱}$ یعنے $\frac{۱}{۲}$ ہے اور تواتر حسب ذیل ہے:

$$\frac{۱}{۲}، \frac{۲}{۳}، \frac{۳}{۴}، \dots، \frac{۹}{۱۰}، \dots، \frac{۱۵}{۱۶}، \dots، \frac{۱۰۸}{۱۰۹}، \dots$$

پہلی مثال یعنے تواتر $\frac{۱}{ن}$ میں ہم دیکھتے ہیں کہ اس تواتر کا ہر عدد یعنے $\frac{۱}{۱۰}$ اپنے پہلے عدد یعنے $\frac{۱}{۹}$ سے کم ہے کیونکہ ہمیں معلوم ہے کہ ایک کسر کی قیمت کم ہو جاتی ہے اگر اس کا نسب نما بڑا ہو جائے۔ اس طرح گویا

تواتر کے عدد قیمت میں اترتے جاتے ہیں اور اس لیے ایسے تواتر کو **نزولی تواتر** کہتے ہیں۔

اس کے برخلاف تیسری مثال یعنے تواتر $\frac{ن}{ن+۱}$ میں یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ہر عدد اپنے پہلے کے عدد سے بڑا ہے کیونکہ

$$(ن+۱)^۲ > ن^۲ + ۲ن$$

$$> ن(ن+۲)$$

$$\text{یعنی}\quad \frac{ن+۱}{ن+۱} > \frac{ن}{ن+۱}$$

غرض اس تواتر کے اعداد بتدریج بڑھتے جاتے ہیں۔ ایسے تواتر کو **صعودی تواتر** کہتے ہیں۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دوسری مثال میں دیا ہوا تواتر نہ تو نزولی ہے اور نہ صعودی۔

۱٫۳- تواتر کی انتہا۔

۱٫۳٫۱ — ن ← ∞ کے معنے :- فرض کرو کہ ن یکے بعد دیگرے قیمتیں ۱، ۲، ۳ . . . اختیار کرتا ہے خود یکے بعد دیگرے کے مفہوم سے ظاہر ہے کہ ن یہ قیمتیں مثلاً ہر ثانیہ کے ابتداء میں اختیار کرتا ہے۔ تب جوں جوں ثانیے گذرتے جاتے ہیں ن بڑا ہوتا جاتا ہے اور چونکہ وقت کی کوئی حد نہیں ہے اس لیے ن کے بڑھنے کی بھی کوئی حد نہیں۔ ہم چاہے کتنے ہی بڑے عدد مثلاً (۹۷۱۳۴۸۶۲۷) کا تصور کریں ایک وقت ضرور ایسا آئے گا کہ ن اس عدد سے بھی بڑا ہو جائے گا۔

ن میں اضافہ کے اس ختم نہ ہونے والے عمل کو تعبیر کرنے کے لیے ہم آسانی کی خاطر ایک مختصر جملہ "ن مائل بہ لاتناہی" یا علامتوں میں "ن ← ∞" استعمال کرتے ہیں اور علامت ∞ سے بالعموم لاتناہی کو تعبیر کیا جاتا ہے۔ ن کے لاتناہی کی طرف مائل ہونے میں بھی وقت کا تصور پایا جاتا ہے لیکن یہ تصور ہم نے محض اپنی

آسانی کی خاطر اختیار کیا ہے۔ خود متغیر ن کی ذات میں وقت کا کوئی مفہوم نہیں پایا جاتا۔
طالب علم کو یہ بات اچھی طرح ذہن نشین کرلینی چاہیے کہ جملہ "ن مائل بہ لاتناہی" کو جب ہم استعمال کرتے ہیں تو اس سے ہماری مراد محض یہ ہوتی ہے کہ ن بتدریج ایسی قیمتیں اختیار کر رہا ہے جو بغیر ختم ہونے کے بڑھتی چلی جارہی ہیں۔ لاتناہی بذاتِ خود کوئی عدد نہیں ہے اور مساوات ن = ∞ کے کوئی معنی نہیں کیونکہ "مساوی بہ لاتناہی" ایک بے معنی جملہ ہے۔ علامت ∞ فی نفسہٖ ایک بے معنی علامت ہے اور صرف "ن مائل بہ ∞" میں یہ معنی دار ہے اور اس کے وہی معنی ہیں جو ہم نے اوپر بطور تعریف کے مقرر کیے ہیں۔

۱ء۳۲ - انتہا کے مفہوم کی توضیح مثالوں کے ذریعے۔

مثال ۱- $\text{ل}_{\text{ن}} = \frac{1}{\text{ن}}$

$$1،\ \frac{1}{2}،\ \frac{1}{3}،\ \ldots\ldots$$

اس تواتر کا ہر عدد اپنے پہلے عدد سے کم ہے اس لیے یہ ایک نزولی تواتر ہے۔

$\frac{1}{\text{ن}} <$ ۰۱ء۰ ن کی ان تمام قیمتوں کے لیے جو ۱۰۰ سے بڑی ہوں یعنی ۱۰۱ اور بعد کے تمام عددوں کے لیے۔

$\frac{1}{\text{ن}} <$ ۰۰۱ء۰ ″ ″ جو ۱۰۰۰ ″ ″ یعنی ۱۰۰۱ ″ ″

$\frac{1}{\text{ن}} <$ ۰۰۰۰۱ء۰ ″ ″ جو ۱۰۰۰۰۰ ″ یعنی ۱۰۰۰۰۱ ″ ″

$\frac{1}{\text{ن}} < \frac{1}{10^{15}}$ ن کی ان قیمتوں کے لیے جو 10^{15} سے بڑی ہوں یعنی $10^{15}+1$ اور بعد کے تمام عددوں کے لیے۔

ہم دیکھتے ہیں کہ ہم کوئی مثبت عدد صہ انتخاب کریں چاہے وہ کتنا ہی چھوٹا ہو ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ اس کے لیے اور اس کے بعد کے تمام اعداد صحیح کے لیے $\frac{1}{\text{ن}} <$ صہ۔ اس کو دوسرے الفاظ میں ہم یوں بھی بیان کر سکتے ہیں کہ $\frac{1}{\text{ن}}$ اور صفر کا

فرق جتنا ہم چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں اگرچہ $\frac{۱}{ن}$ خود کبھی صفر نہیں ہوتا۔ فریق مخالف ہم کو چاہے کتنا ہی چھوٹا عدد کیوں نہ بیان کرے ہم ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ تواتر کا ن واں عدد اور اس کے بعد کے تمام اعداد صہ سے چھوٹے ہوں۔ اس بات کو ہم مختصر طور پر یوں ظاہر کرتے ہیں کہ تواتر ”$\frac{۱}{ن}$ کی انتہا صفر ہے“ جبکہ ن $\to \infty$ ہو۔

مثال ۲۔ $ل_ن = ۱ - \frac{۱}{ن}$

تواتر حسبِ ذیل ہے۔

$$۰ ، \frac{۱}{۲} ، \frac{۲}{۳} ، \frac{۳}{۴} ، \frac{۴}{۵} ، \frac{۵}{۶} ، \dots$$

اس تواتر کا ہر عدد اپنے پہلے عدد سے بڑا ہے اور اس لیے یہ ایک صعودی تواتر ہے۔ اب اس میں ہم ن کو چاہے کتنا ہی بڑا لیں $ل_ن$ ہمیشہ ۱ سے کم رہتا ہے۔ لیکن ہم اوپر کی مثال میں دیکھ چکے ہیں کہ $\frac{۱}{ن}$ کو جتنا چاہیں چھوٹا بنایا جا سکتا ہے اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ $(۱ - \frac{۱}{ن})$ کو ۱ کے جتنا قریب چاہیں لا سکتے ہیں یعنے $۱ - \frac{۱}{ن}$ اور ۱ کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔

مثلاً $\{۱-(۱-\frac{۱}{ن})\}$ چھوٹا ہوگا ۱۰۰۰۰، سے اگر $\frac{۱}{ن} <$ ۱۰۰۰۰،

یعنے اگر ن > ۱۰۰۰۰ یعنے ن ۱۰۰۰۱، یا اس سے بڑا صحیح عدد لیا جائے۔

اس طرح $\{۱-(۱-\frac{۱}{ن})\} < \frac{۱}{۱۰^{۲۴}}$ اگر ن $> ۱۰^{۲۴}$

تواتر $ل_ن = ۱ - \frac{۱}{ن}$ کی اس خاصیت کو کہ اس کی عام رقم $۱ - \frac{۱}{ن}$ کا فرق ۱ سے جس قدر چاہیں چھوٹا بنایا جا سکتا ہے۔ ریاضی کی زبان میں ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ ”تواتر $۱ - \frac{۱}{ن}$ کی انتہا ۱ ہے“ جبکہ ن $\to \infty$ ہو۔

اوپر کی دونوں مثالوں کے نتائج کو ہم علامتوں میں اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \frac{۱}{ن} = ۰$$

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \left(۱ - \frac{۱}{ن}\right) = ۱$$

مثال ۳- $ل_ن = ن^۲$ یہ تواتر حسب ذیل ہے:-

۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، . . . .

اس تواتر میں ہم دیکھتے ہیں کہ ہر عدد اپنے پیشرو سے بڑا ہے یعنے یہ ایک صعودی تواتر ہے۔ اب ہم چاہیں کتنا ہی بڑا مثبت عدد (گ) لیں ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم ہوسکتا ہے کہ ن کی اس قیمت کے لیے اور اس کے بعد کی تمام صحیح قیمتوں کے لیے $ن^۲ > گ$۔ مثلاً

$ن^۲ > ۱۰۰۰۰$ اگر ن، ۱۰۱ یا اس سے بڑا عدد ہو۔

$ن^۲ > ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$ اگر ن، ۱۰۰۰۰۱ یا اس سے بڑا عدد ہو۔

$ن^۲ > ۱۰^{۸۲}$ اگر ن، $۱۰^{۴۱} + ۱$ یا اس سے بڑا عدد ہو۔

غرضکہ ہم چاہے کتنے ہی بڑے عدد کا تصور کریں ایک وقت ایسا آئیگا کہ تواتر $ل_ن = ن^۲$ بالآخر اس عدد سے بھی بڑا ہو جائیگا۔ یعنی تواتر $ن^۲$ کی کوئی محدود انتہا نہیں ہے۔ اس کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ تواتر $ن^۲$ کی انتہا $+\infty$ ہے اور اس طرح لکھتے ہیں۔

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} ن^۲ = \infty$$

اس طرح اگر تواتر $ل_ن = -ن^۲$ یعنے تواتر

-۱، -۴، -۹، -۱۶، -۲۵، . . . .

پر غور کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس تواتر کی رقمیں جبر یہ طور پر کم ہوتی جارہی ہیں اور ہم چاہے کتنا ہی چھوٹا منفی عدد (-گ) لیں ن کو اس طرح انتخاب کیا جاسکتا ہے کہ

$-ن^۲ < -گ$ سے مثلاً

$-ن^۲ < -۱۰۰۰۰۰۰$ اگر ن ۱۰۰۱ یا اس سے بڑا صحیح عدد ہو۔

$-ن^۲ < -۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰$ اگر ن ۱۰۰۰۰۱ یا اس سے بڑا صحیح عدد ہو۔

تواتر - $ن^۲$ کی بھی کوئی محدود انتہا نہیں ہے یا اگر ہم چاہیں تو یوں کہہ سکتے ہیں کہ تواتر "$-ن^۲$ کی انتہا $-\infty$" اور اس طرح لکھتے ہیں۔

$$\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} (-ن^۲) = -\infty$$

یہ محض تعریف ہے جو اختصار کی خاطر اختیار کی گئی ہے ورنہ حقیقت میں ایسی مساواتوں کے کوئی معنی نہیں۔

مثال ۴ - انتہا کے مفہوم کو واضح کرنے کے لیے ایک اچھی مثال کسی لاتناہی سلسلہ کا حاصل جمع ہے۔ محدود سلسلوں مثلاً حسابی، ہندسی یا موسیقی سلسلوں سے طالب علم کو پہلے سے ہی واقفیت ہے۔

مثلاً ذیل کا سلسلہ

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots + \frac{۱}{۲^ن} \qquad (۱)$$

ایک محدود ہندسی سلسلہ ہے جس کا مشترک جزوِ ضربی ر = $\frac{۱}{۲}$ ہے۔ اگر ہم اس ن رقموں والے سلسلہ کے حاصل جمع کو $ل_ن$ سے تعبیر کریں تو ہم کو معلوم ہے کہ

$$ل_ن = \frac{\frac{۱}{۲}(۱ - \frac{۱}{۲^ن})}{۱ - \frac{۱}{۲}} = ۱ - \frac{۱}{۲^ن} \qquad (۲)$$

سلسلہ (۱) کو اگر ہم ن رقموں پر ختم ہوتا ہوا نہ فرض کریں بلکہ مان لیں کہ یہ سلسلہ اس قاعدہ سے ہمیشہ آگے بڑھتا ہے اور اس کی بے شمار رقمیں ہیں۔

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots \frac{۱}{۲^ن} + \frac{۱}{۲^{ن+۱}} + \cdots \qquad (۳)$$

تو اس لاتناہی سلسلہ (۳) کی مدد سے ہم کو ایک لاتناہی تواتر ملتا ہے

جو حسب ذیل ہے:-

$ل_۱$ = پہلی رقم $= \frac{۱}{۲}$

$ل_۲$ = پہلی دو رقموں کا مجموعہ $= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$

$ل_۳$ = پہلی تین رقموں کا مجموعہ $= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$

. . . .

$ل_ن$ = پہلی ن رقموں کا مجموعہ $= \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^ن} = ۱ - \frac{۱}{۲^ن} = \frac{۲^ن - ۱}{۲^ن}$

. . . .

یعنے تواتر حسب ذیل ہے:-

$$\frac{۱}{۲}،\ \frac{۳}{۴}،\ \frac{۷}{۸}،\ \frac{۱۵}{۱۶}،\ \frac{۳۱}{۳۲}،\ \ldots\ \frac{۲^ن - ۱}{۲^ن}،\ \ldots \qquad (۴)$$

ہم دیکھتے ہیں یہ ایک صعودی تواتر ہے جس کی ہر رقم ا سے کم ہے لیکن یہ تواتر تبدیج ا کے قریب آرہا ہے گو کبھی اس کا کوئی عدد ا کے بالکل مساوی نہیں ہو جاتا۔ لیکن ہم ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ تواتر (۴) میں کے عدد $ل_ن$ کا فرق ا سے یعنے $۱ - ل_ن$ جس قدر چاہیں چھوٹا ہو جائے۔ بالفاظ دیگر سلسلۂ (۳) کی ن رقموں کا مجموعہ ا کے جتنا چاہیں قریب ہو جائے۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ سلسلۂ (۳) کی کتنی رقمیں لی جائیں کہ مجموعہ ا سے بقدر $\frac{۱}{۱۰۰۰۱۰}$ (یعنے $۱۰^{-۱۰۰۰}$) کے کم ہو۔

اب چونکہ $ل_ن = ۱ - \frac{۱}{۲^ن}$

$$\therefore\ ۱ - ل_ن = ۱ - \left(۱ - \frac{۱}{۲^ن}\right) = \frac{۱}{۲^ن}$$

$$\therefore\ \frac{۱}{۲^ن} \leq \frac{۱}{۱۰^{۱۰۰۰}}$$

$\therefore\ ۲^ن \geq ۱۰^{۱۰۰۰}$ یعنے ن لوک$_{۱۰}$ ۲ $\geq$ ۱۰۰۰ یعنے ن $\geq \frac{۱۰۰۰}{\text{لوک}_{۱۰}\ ۲}$

لوکارثمی جدولوں سے ہم بآسانی معلوم کر سکتے ہیں کہ اگر ن = ۳۳۲۲ تو

$2^{\text{ن}} > 10^{1000}$ یعنے $\frac{1}{2^{\text{ن}}} < \frac{1}{10^{1000}}$ جس سے معلوم ہوا کہ اگر سلسلۂ (۳) کی ۳۳۲۲ رقمیں لی جائیں تو سلسلہ کا مجموعہ ۱ سے مقدار $\frac{1}{10^{1000}}$ سے بھی چھوٹا ہوگا۔ اس طرح ہم سلسلہ کی اور زیادہ رقمیں لے کر سلسلہ کو ۱ کے اور زیادہ قریب لا سکتے ہیں۔ اس بناء پر ہم کہتے ہیں کہ تواتر (۴) یعنے $\text{ل}_{\text{ن}} = 1 - \frac{1}{2^{\text{ن}}}$ کی انتہا ۱ ہے یعنے لاتناہی سلسلۂ (۳) کا مجموعہ ۱ ہے۔

سلسلۂ (۳) اور اس کے مجموعہ کی ہم ہندسی تعبیر کر سکتے ہیں۔

ا ——— ج_1 ——— ج_2 ——— ج_3 — ج_4 — ج_5 — ب

فرض کرو کہ ا ب ایک خطِ مستقیم کا طول ۱ ہے۔ ا ب کی تنصیف نقطہ ج_1 پر کرو۔ ج_1 ب کی تنصیف نقطہ ج_2 پر، ج_2 ب کی تنصیف نقطہ ج_3 پر اور ج_3 ب کی ج_4 پر، اسی طرح متواتر تنصیف کرتے چلے جاؤ تو

$\text{اج}_1 = \frac{1}{2}$، $\text{ج}_1\text{ج}_2 = \frac{1}{4}$، $\text{ج}_2\text{ج}_3 = \frac{1}{8}$، $\text{ج}_3\text{ج}_4 = \frac{1}{16}$، $\text{ج}_4\text{ج}_5 = \frac{1}{32}$، وغیرہ

اور سلسلۂ (۳) کی حسب ذیل تعبیر ہو جاتی ہے :-

$$\text{اج}_1 + \text{ج}_1\text{ج}_2 + \text{ج}_2\text{ج}_3 + \text{ج}_3\text{ج}_4 + \cdots + \text{ج}_{\text{ن}-1}\text{ج}_{\text{ن}} + \cdots \quad (5)$$

اور تواتر (۴) میں

$$\text{ل}_{\text{ن}} = \text{اج}_{\text{ن}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

اب ظاہر ہے کہ جس قدر زیادہ تنصیف کرتے چلے جائیں نقطۂ $\text{ج}_{\text{ن}}$ نقطہ ب کے اسی قدر زیادہ قریب آتا چلا جائے گا اور ہم عمل تنصیف کو اتنے مرتبہ دُہرا سکتے ہیں کہ $\text{ج}_{\text{ن}}$ ب کا طول جتنا چاہیں چھوٹا ہو جائے یعنے $\text{اج}_{\text{ن}}$ کا طول اب کے

طول کے جس قدر چاہیں قریب آجائے پس

$$\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}}\ ج = اب = ١$$

۱۳۱۷۱- انتہا کی باضابطہ تعریف ——— مذکورۂ بالا مثالوں کے ذریعہ انتہا کے مفہوم کی توضیح کرنے کے بعد اب ہم انتہا کی باضابطہ تعریف کرینگے۔

تعریف ۱ ——— تواتر لن کی انتہا جبکہ ن مائل بہ لاتناہی ہو ل اُس وقت ہوگی جبکہ اگر کوئی اختیاری چھوٹا ثبت عدد صہ دیا ہوا ہو تو ہم ایک ایسا ثبت صحیح عدد نَ معلوم کرسکیں کہ تواتر کے رکن لنَ سے شروع کرکے اور بعد کے تمام رکنوں کے لیے لن اور ل کا فرق صہ سے چھوٹا ہو۔ اِس صورت میں تواتر لن کو "مُستدق" کہتے ہیں۔

لن اور ل کے مطلق فرق کو | لن - ل | سے تعبیر کرتے ہیں۔

انتہا کی اس تعریف میں دو نکتے بہت اہم ہیں اور طالب علم کو ان پر بخوبی غور کرنا چاہیے۔ اول تو یہ کہ صہ جو چھوٹا ثبت عدد دیا ہوا ہے وہ اختیاری چھوٹا ہے یعنے سوائے بالکل صفر کے ہم صہ کو جتنا چھوٹا چاہیں لے سکتے ہیں۔ صہ کی مختلف قیمتیں لینے سے نَ کی بالعموم مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ہر صہ کے لیے اوپر کی تعریف میں دی ہوئی خاصیت پائی جانی چاہیے۔ اگر صہ کی بعض قیمتوں کے لیے یہ خاصیت پائی جائے اور بعض قیمتوں کے لیے یہ خاصیت نہ پائی جائے تو لن کی انتہا ل نہیں ہوگی۔ دوسرے یہ کہ اگر لنَ سے شروع کرنے کے بعد تواتر کا صرف ایک رکن بھی ایسا پایا جائے کہ اس کا اور ل کا فرق صہ سے چھوٹا نہیں ہے تو انتہا ل نہیں ہوگی۔ نَ ایسا معلوم کرنا چاہیے کہ لنَ کے بعد کے تمام ارکان کے لیے لن اور ل کا فرق صہ سے چھوٹا ہو۔ لفظ تمام پر ہم نے اسی لیے زور دیا ہے۔

اِس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی تواتر لن میں ن کی چند محدود قیمتوں کے لیے

$ل_ن$ کی قیمت بدل دیں تو اس سے تواتر کی انتہا پر کوئی اثر نہیں پڑتا مثلاً ہم کو معلوم ہے کہ تواتر $ل_ن = \frac{۱}{ن}$ کی انتہا صفر ہے۔ اب فرض کرو کہ ہم ایک نیا تواتر اس طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$ل_ن = ۱۰۰ \quad \text{جبکہ} \quad ن = ۱۰،\ ۱۰^{۲}،\ ۱۰^{۳}،\ \ldots،\ ۱۰^{۱۰۰۰}$$

$$ل_ن = \frac{۱}{ن}، \quad \text{ن کی باقی تمام قیمتوں کے لیے۔}$$

اس تواتر کی انتہا بھی صفر ہے۔

لیکن اگر ایک تواتر کے لاتناہی ارکان کی قیمت بدل دی جائے تو انتہا کا وہی باقی رہنا ضروری نہیں ہے۔ مثلاً اگر ایک تواتر $ل_ن$ ایسا لیا جائے کہ

$$ل_ن = ۱ \quad \text{جبکہ ن طاق ہو،}$$

$$ل_ن = \frac{۱}{ن} \quad \text{جبکہ ن جفت ہو،}$$

تو اس تواتر کی انتہا نہ تو صفر ہے نہ ۱۔

اس کے علاوہ یہ بھی ضروری نہیں ہے کہ تواتر کی انتہا تواتر کے کسی رکن کی اصلی قیمت کے مساوی ہو۔ گذشتہ دفعہ میں ہم نے جتنی مثالیں دی ہیں اُن میں طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ تواتر کے کسی رکن کی قیمت انتہا کے مساوی نہیں ہے مثلاً تواتر $\frac{۱}{ن}$ کی انتہا صفر ہے۔ لیکن تواتر کا کوئی رکن صفر کے مساوی نہیں ہے۔

البتہ بعض خاص تواتروں کے لیے یہ ممکن ہے کہ تواتر کی انتہا کسی ایک رکن کی قیمت کے مساوی ہو۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک تواتر $ل_ن$ اس طرح لیتے ہیں کہ

$$ل_ن = ۰ \quad \text{جبکہ} \quad ن = ۱۰،\ ۱۰^{۲}،\ ۱۰^{۳}،\ \ldots،\ ۱۰^{۱۰۰۰}$$

$$ل_ن = \frac{۱}{ن} \quad \text{ن کی باقی تمام قیمتوں کے لیے۔}$$

ہم کو معلوم ہے کہ چونکہ اس تواتر کے صرف محدود تعداد ارکان کی قیمت بدل دی گئی ہے اِس لیے انتہا میں کوئی فرق نہیں آتا اور اس کی انتہا اب بھی

صفر ہے اور تواتر کے چند ارکان کی قیمت بھی صفر ہے - یہ ایک خاص صورت ہے لیکن عام تواتر کے لیے ایسا ہونا ضروری نہیں ہے -

تعریف ۲- ن مائل بہ لاتناہی ہو تو تواتر لن ، +∞ (مثبت لاتناہی) کی طرف اُس وقت مائل ہوگا جبکہ اگر کتنا ہی بڑا اختیاری مثبت عدد گ دیا ہوا ہو تو ایک مثبت صحیح عدد نَ ایسا معلوم ہو سکے کہ لنَ سے شروع کر کے اور بعد کے **تمام** ارکان کی قیمت گ سے بڑی ہو -

اس صورت میں ہم یوں لکھتے ہیں کہ

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \text{لن} = +\infty \quad \text{یا لن} \to \infty \text{ جبکہ ن} \to \infty ،$$

تعریف ۳- ن مائل بہ لاتناہی ہو تو تواتر لن ، -∞ (منفی لاتناہی) کی طرف اُس وقت مائل ہوگا جبکہ اگر کتنا ہی بڑا اختیاری مثبت عدد گ دیا ہوا ہو تو ایک مثبت صحیح عدد نَ ایسا معلوم ہو سکے کہ لنَ سے شروع کر کے بعد کے **تمام** ارکان کی قیمت -گ سے کم ہو -

اس صورت میں ہم لکھتے ہیں

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \text{لن} = -\infty \quad \text{یا لن} \to -\infty \text{ اگر ن} \to \infty$$

ان دونوں صورتوں میں ہم کہتے ہیں لن "متسع" ہے، متدق نہیں ہے -

تعریف ۴- اگر کسی تواتر لن کی انتہا نہ تو محدود عدد ل ہو نہ وہ +∞ یا -∞ کی طرف مائل ہو تو کہا جاتا ہے کہ تواتر لن اہتزاز کرتا ہے -

مثلاً تواتر $\text{لن} = (-1)^{\text{ن}}$ نؔ اور تواتر $\text{لن} = (-1)^{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ن}}$ اہتزاز کرتے ہیں -

توضیحی مثالیں

مثال (۱):— $ل_ن = ن^ک$

اس تواتر کے لیے ک کی قیمتوں کے لحاظ سے تین صورتیں پیدا ہوتی ہیں :

(ا) اگر ک کوئی مثبت صحیح عدد یا مثبت کسری عدد ہو مثلاً فرض کرو کہ ک = $\frac{۳}{۲}$ اگر ہم چاہیں کہ $ن^{\frac{۳}{۲}}$ کی قیمت ۱۰۰۰ سے بڑی ہو تو ظاہر ہے کہ ن کو ۱۰۰ کے مساوی لینا کافی ہے اور $ل_{۱۰۱}$ سے شروع کر کے باقی تمام ارکان ۱۰۰۰ سے بڑے ہیں۔ اگر ہم چاہیں کہ $ن^{\frac{۳}{۲}}$ کی قیمت ۱۰۰۰۰۰۰ سے بڑی ہو تو ن کو ۱۰۰۰۰ کے مساوی لینا کافی ہے کیونکہ $ل_{۱۰۰۰۱}$ سے شروع کر کے باقی تمام ارکان ۱۰۰۰۰۰۰ سے بڑے ہیں۔ علیٰ ہذا القیاس ہم چاہے کتنا ہی بڑا مثبت عدد گ لیں ہم ایک $نَ$ ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ $ل_ن >$ گ جبکہ ن $\geq$ $نَ$۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ک کی مثبت قیمتوں کے لیے تواتر $ل_ن = ن^ک$ کی انتہا $+\infty$ ہے۔

(ب) اگر ک = ۰ تو $ل_ن = ن^۰ = ۱$ یعنی تواتر کا ہر رکن ۱ کے مساوی ہے اس لیے اس کی انتہا بھی ۱ ہے۔

(ج) اگر ک کوئی منفی صحیح عدد یا منفی کسر ہے تو فرض کرو کہ ک = $-$م جہاں م ایک مثبت عدد ہے۔ پس

$$ل_ن = ن^ک = ن^{-م} = \frac{۱}{ن^م}$$

چونکہ ہم صورت (ا) میں ثابت کر چکے ہیں کہ کسی مثبت قوت ک کے لیے $ن^ک$ کی انتہا $+\infty$ ہے پس جس قدر ن بڑھتا جائیگا اُسی قدر $ن^م$ بھی بڑھتا جائے گا اور اس لیے اسی قدر $\frac{۱}{ن^م}$ چھوٹا ہوتا جائیگا۔

فرض کرو کہ ہم $\frac{۱}{ن^م}$ کو $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰}$ سے چھوٹا کرنا چاہتے ہیں۔

پس $ن^م > \frac{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰}{۱}$

یعنے ن > (۱۰۰۰۰۰۰۰۰) کا م واں جذر

غرض کہ ہم ن کو اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ $\frac{۱}{ن^{م}}$ جتنا چاہیں چھوٹا ہو جائے جس سے معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{۱}{ن^{م}}$ یعنے $ن^{ک}$ کی انتہا صفر ہے اگر ک کوئی منفی عدد ہو۔

$$مثال ۲ -\quad ل_{ن} = ۱ + \left\{ \frac{جب \frac{ن\pi}{۲}}{ن} \right\}$$

ہم کو معلوم ہے کہ چاہے زاویہ طہ کچھ ہی ہو جب طہ کی مطلق قیمت کبھی ۱ سے نہیں بڑھ سکتی - پس تواتر $ل_{ن}$ حسب ذیل دو تواتروں کے درمیان واقع ہوتا ہے -

$$۱ - \frac{۱}{ن} \leqq ۱ + \frac{جب \frac{ن\pi}{۲}}{ن} \leqq ۱ + \frac{۱}{ن}$$

چونکہ دونوں تواتروں $۱ - \frac{۱}{ن}$ اور $۱ + \frac{۱}{ن}$ کی انتہا ۱ ہے اس لیے درمیانی تواتر $ل_{ن}$ کی انتہا بھی ۱ ہونی چاہیے - یہ اس طرح سے بھی ظاہر ہے کہ $\frac{جب \frac{ن\pi}{۲}}{ن}$ کی مطلق قیمت کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں کیونکہ یہ قیمت $\frac{۱}{ن}$ کے مساوی یا اس سے کم ہے۔

$$مثال ۳ -\quad ل_{ن} = ن^{۲} \left\{ ۱ + (-۱)^{ن} \right\}$$

چونکہ $(-۱)^{ن} = -۱$ اگر ن طاق عدد

$= +۱$ اگر ن جفت عدد

اس لیے

$ل_{ن} = ۰$ اگر ن طاق عدد

$= ۲ن^{۲}$ اگر ن جفت عدد

ظاہر ہے کہ تواتر کی انتہا $+\infty$ نہیں ہے کیونکہ لاتناہی ارکان

صفر ہیں - نیز تواتر کی انتہا $-\infty$ یا محدود عدد بھی نہیں اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ تواتر اہتزاز کرتا ہے -

مشقی سوالات ۲

ذیل کے تواتروں کی انتہا معلوم کرو جبکہ ن مائل بہ لاتناہی ہو -

(۱) $ل_ن = \frac{۱۰۰۰۰۰۰۰۰}{ن}$

(۲) $ل_ن = \frac{ن}{۱۰۰۰۰۰۰۰۰}$

(۳) $ل_ن = \frac{جب\ ن\ طہ}{ن}$ ، $\frac{جب\ ن\ طہ}{\sqrt{ن}}$ ، $\frac{جب\ ن\ طہ}{ن^۲}$

(۴) $ل_ن = \frac{ا\ جم^۲\ ن\ طہ + ب\ جب^۲\ ن\ طہ}{ن}$ (اُ ب اور طہ کوئی حقیقی عدد ہیں)

(۵) $ل_ن = \frac{۱}{ن - (-۱)^ن}$

(۶) $ل_ن = ن - (-۱)^ن$

(۷) $ل_ن = ن\left\{۱ - (-۱)^ن\right\}^ن$

(۸) ن کی وہ کم سے کم قیمت معلوم کرو جس کے لیے $ن^۲ + ن > ۹۹۹۰۰۰$

۴ء۱ - انتہا کے متعلق عام مسائل

۴ء۱ء۱ - مسئلہ ۱ - اگر تواتر $ل_ن$ کی انتہا ل ہو تو ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے ہم لکھ سکتے ہیں

لن = ل + کن .... (۱)

جہاں کن کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں یعنے جہاں تواتر کن کی انتہا صفر ہے۔

فرض کرو کہ صہ کوئی اختیاری چھوٹا دیا ہوا عدد ہے۔ اب

|کن| = |لن - ل| .... (۲)

لیکن چونکہ لن کی انتہا ل ہے اس لیے تعریف کے بموجب ایک مثبت عدد صحیح عدد نَ ایسا معلوم ہو سکتا ہے لنَ اور بعد کے تمام ارکان کے لیے

|لن - ل| < صہ۔ اس لیے کنَ اور بعد کے تمام کن کے لیے

|کن| < صہ

|کن - ۰| < صہ .... (۳)

پس تعریف کے بموجب تواتر کن کی انتہا صفر ہے۔

اس مسئلہ کی مدد سے ہم دو تواتروں کے حاصل جمع، فرق، حاصل ضرب اور خارج قسمت کی انتہا آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ان میں ہمیں ابتدائی ریاضی کے ایک اور مسئلہ کی بھی ضرورت ہوتی ہے جس کو ہم یہاں بیان کرینگے۔

۱ء۴۲ - مسئلہ ۲ — اگر ر اور س کوئی مثبت یا منفی حقیقی عدد ہیں تو

|ر + س| ≦ |ر| + |س| .... (۱)

یعنی الفاظ میں ر اور س کے مجموعہ کی مطلق قیمت ان کی علیحدہ علیحدہ مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کسی صورت میں بڑی نہیں ہو سکتی بلکہ مساوی

ہوگی یا کم ہوگی - اس بدیہی مسئلہ کو ہم مثالوں کے ذریعہ سے واضح کرینگے - فرض کرو کہ $ر = \frac{۱۱}{۳}$، اور $س = -\frac{۳۵}{۹}$، تب

$$|ر + س| = \left|\frac{۱۱}{۳} - \frac{۳۵}{۹}\right| = \left|-\frac{۲}{۹}\right| = \frac{۲}{۹}$$

اور

$$|ر| + |س| = \left|\frac{۱۱}{۳}\right| + \left|-\frac{۲۵}{۹}\right| = \frac{۱۱}{۳} + \frac{۳۵}{۹} = \frac{۶۸}{۹}$$

چونکہ $\frac{۲}{۹} < \frac{۶۸}{۹}$

اس لیے اس صورت میں $|ر + س| < |ر| + |س|$ اور مسئلہ صحیح ہے۔

اب فرض کرو کہ $ر = \frac{۱۱}{۳}$، $س = \frac{۳۵}{۹}$، اس لیے

$$|ر + س| = \left|\frac{۱۱}{۳} + \frac{۳۵}{۹}\right| = \left|\frac{۶۸}{۹}\right| = \frac{۶۸}{۹}$$

اور $$|ر| + |س| = \left|\frac{۱۱}{۳}\right| + \left|\frac{۳۵}{۹}\right| = \frac{۱۱}{۳} + \frac{۳۵}{۹} = \frac{۶۸}{۹}$$

اس لیے اس صورت میں $|ر + س| = |ر| + |س|$ اور اب بھی مسئلہ صحیح ہے۔

بالآخر اگر $ر = -\frac{۱۱}{۳}$ اور $س = -\frac{۳۵}{۹}$ تو

$$|ر + س| = \left|-\frac{۱۱}{۳} - \frac{۳۵}{۹}\right| = \left|-\frac{۶۸}{۹}\right| = \frac{۶۸}{۹}$$

$$|ر| + |س| = \left|-\frac{۱۱}{۳}\right| + \left|-\frac{۳۵}{۹}\right| = \frac{۱۱}{۳} + \frac{۳۵}{۹} = \frac{۶۸}{۹}$$

اس صورت میں بھی $|ر + س| = |ر| + |س|$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ر اور س دونوں مثبت یا دونوں منفی ہیں تو $|ر + س| = |ر| + |س|$ لیکن اگر ر اور س میں سے کوئی ایک منفی اور دوسرا مثبت ہے تو $|ر + س| < |ر| + |س|$

۳۴ء۱۔ مسئلہ ۳ — اگر ایک تواتر $ل_ن$ کی انتہا ل اور

دوسرے تواتر بن کی انتہا ب ہو تو تواتر (لن + بن) کی انتہا (ل + ب) ہوگی۔

فرض کرو کہ صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا مثبت عدد ہے۔ تب چونکہ لن کی انتہا ل ہے اس لیے ایک صحیح عدد ن۱ ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ

|لن - ل| < صہ/۲ جبکہ ن ≥ ن۱ ....(۱)

اس طرح چونکہ بن کی انتہا ب ہے اس لیے ایک صحیح عدد ن۲ ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ

|بن - ب| < صہ/۲ جبکہ ن ≥ ن۲ ....(۲)

ن۱ اور ن۲ میں سے جو عدد بڑا ہو اس کو ہم نَ سے تعبیر کرتے ہیں تو ظاہر ہے کہ نَ اور اس سے بڑی قیمتوں کے لیے (۱) اور (۲) بیک وقت پورے ہوتے ہیں۔

اب مسئلہ (۲) کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ ن کی ہر قیمت کے لیے

|(لن + بن) - (ل + ب)| = |(لن - ل) + (بن - ب)|

≤ |لن - ل| + |بن - ب|

اس لیے مساواتوں (۵) اور (۶) سے ظاہر ہے کہ

|(لن + بن) - (ل + ب)| < صہ/۲ + صہ/۲

< صہ جبکہ ن ≥ نَ

پس تعریف کے بموجب

نہا (ن ← ∞) (لن + بن) = ل + ب

اس مسئلہ کو الفاظ میں ہم یوں بیان کر سکتے ہیں کہ دو تواتروں کے

حاصل جمع کی انتہا دونوں کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے۔
اس مسئلہ کا ایک زیادہ مختصر ثبوت جو اگرچہ اس قدر مکمل نہیں ہے حسب ذیل ہے:۔
چونکہ $ل_ن$ کی انتہا $ل$ ہے اس لیے ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے

$$ل_ن = ل + صہ_1$$

اس طرح

$$ب_ن = ب + صہ_2$$

جہاں $صہ_1$ اور $صہ_2$ کو ہم مسئلہ (۱) کی بناء پر جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں پس

$$ل_ن + ب_ن = (ل + صہ_1) + (ب + صہ_2) = (ل + ب) + (صہ_1 + صہ_2)$$

اس لیے

$$\left|(ل_ن + ب_ن) - (ل + ب)\right| = \left|صہ_1 + صہ_2\right|$$

کیونکہ $صہ_1 + صہ_2$ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں۔ جس سے مسئلہ ظاہر ہے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ $ل_ن = \frac{1}{ن}$، $ب_ن = \frac{1}{2ن^2}$ پس $ل_ن + ب_ن = \frac{1}{ن} + \frac{1}{2ن^2}$

$ل_ن \leftarrow 0$، $ب_ن \leftarrow 0$ اور $ل_ن + ب_ن \leftarrow 0$

$ل_ن + ب_ن$ کی انتہا صفر ثابت کرنے کے لیے ہم کوئی عدد صہ جتنا چاہیں چھوٹا لیتے ہیں۔ اب

$\frac{1}{ن} + \frac{1}{2ن^2} > صہ$ اگر $\frac{1}{ن} + \frac{1}{2ن^2} - صہ > 0$ یعنے اگر $1 + 2ن - 2صہ ن^2 > 0$

یعنے اگر $2صہ ن^2 - 2ن - 1 > 0$

پس مساوات ۲ صہ ن۲ - ۲ ن - ۱ = ۰ سے ن کی جو ثبت قیمت حاصل ہوتی ہے اس سے بڑی صحیح قیمت لی جائے تو اس سے شروع کر کے بعد کے تمام ن کے لیے ۱/ن + ۱/۲ن۲ > صہ اس لیے ثابت ہوا کہ لن + بن کی انتہا صفر ہے جو دونوں انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

مثال ۲ — لن = (۱ - ۱/ن)، بن = (۱/۲ - ۱/۲ن۲)

لن + بن = ۳/۲ - (۱/ن + ۱/۲ن۲)

اب ظاہر ہے کہ لن ← ۱، بن ← ۱/۲

اور

۳/۲ - (لن + بن) = ۱/ن + ۱/۲ن۲

ابھی مثال ۱ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ ہم ایک ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ اس سے شروع کر کے اور بعد کے تمام ن کے لیے ۱/ن + ۱/۲ن۲ > صہ جہاں صہ کوئی چھوٹا عدد ہے۔

پس اس ن کے لیے اور بعد کے تمام ن کے لیے ۳/۲ اور (لن + بن) کا فرق صہ سے کم ہے اس لیے تعریف کے بموجب (لن + بن) کی انتہا ۳/۲ ہے جو لن اور بن کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اوپر کی دونوں مثالوں سے مسئلہ ۳ کی تصدیق ہوتی ہے۔

نوٹ ۱ — اوپر جو ثبوت ہم نے دو تواتروں کے لیے دیا ہے اس کو آسانی سے تین یا زیادہ تواتروں کے لیے وسیع کیا جا سکتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ یہ مسئلہ تواتروں کی کسی محدود تعداد کے لیے صحیح ہے۔ لیکن تواتروں کی لامتناہی تعداد کے لیے یہ مسئلہ صحیح نہیں رہتا۔

مثلاً تواتروں

$$\frac{۱}{ن^{۲}}،\ \frac{۲}{ن^{۲}}،\ \frac{۳}{ن^{۲}}،\ \ldots\ldots\ \frac{ن}{ن^{۲}}$$

پر غور کرو۔ ان میں سے ہر تواتر کی انتہا صفر ہے۔ اس لیے انتہاؤں کا مجموعہ بھی صفر ہے چاہے ن کوئی عدد ہو۔ لیکن اگر ان تواتروں کا مجموعہ لیا جائے تو

$$\frac{۱}{ن^{۲}}+\frac{۲}{ن^{۲}}+\cdots+\frac{ن}{ن^{۲}}=\frac{۱}{ن^{۲}}(۱+۲+\cdots+ن)=\frac{ن(ن+۱)}{۲ن^{۲}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲ن}$$

اور ظاہر ہے کہ اس مجموعہ کی انتہا $\frac{۱}{۲}$ ہے۔ یعنے مجموعہ کی انتہا، انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی نہیں ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ جب ہم مجموعے کی انتہا لیتے ہیں یعنی ن کو بہت بڑا کرتے ہیں تو چونکہ تواتروں کی تعداد ن ہے اس لیے یہ تعداد بھی لامتناہی ہو جاتی ہے۔

نوٹ ۲۔ بعینہ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ دو تواتروں کے فرق کی انتہا، انتہاؤں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے یعنے

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}(ل_{ن}-ب_{ن})=ل-ب$$

۴۴ء۱۔ مسئلہ ۴۔ اگر تواتر $ل_{ن}$ کی انتہا ل اور تواتر $ب_{ن}$ کی انتہا ب ہو تو تواتر $(ل_{ن}\ ب_{ن})$ کی انتہا ل ب ہوگی، یعنے دو تواتروں کے حاصل ضرب کی انتہا، انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگی۔

چونکہ $ل_{ن}$ کی انتہا ل ہے اور $ب_{ن}$ کی انتہا ب ہے اس لیے ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے مسئلہ (۱) کی رو سے

$$ل_{ن}=ل+صہ_{۱}،\ \text{جہاں}\ \underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\ صہ_{۱}=۰$$

$$ب_{ن}=ب+صہ_{۲}،\ \text{جہاں}\ \underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\ صہ_{۲}=۰$$

$$\therefore\ ل_{ن}\ ب_{ن}=(ل+صہ_{۱})(ب+صہ_{۲})=ل ب+(صہ_{۱}ب+صہ_{۲}ل+صہ_{۱}صہ_{۲})$$

$$\therefore\ |ل_{ن}\ ب_{ن}-ل ب|=|صہ_{۱}ب+صہ_{۲}ل+صہ_{۱}صہ_{۲}|$$

اب چونکہ صہ۱ اور صہ۲ کی انتہا صفر ہے اس لیے ہم ن کی ایک کافی بڑی قیمت نؔ ایسی معلوم کر سکتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیاری چھوٹا ثبت عدد دیا ہوا ہو تو

$$|\text{صہ}_1\,\text{ب} + \text{صہ}_2\,\text{ا} + \text{صہ}_1\,\text{صہ}_2| < \text{صہ}$$

پس

$$|\text{ا}_\text{ن}\,\text{ب}_\text{ن} - \text{ا}\,\text{ب}| < \text{صہ} \quad \text{جبکہ ن} \geq \text{نؔ}$$

یعنے ایک نؔ سے شروع کر کے بعد کے تمام ن کے لیے $\text{ا}_\text{ن}\,\text{ب}_\text{ن}$ اور اب کا فرق صہ سے چھوٹا ہے اس لیے انتہا کی تعریف کی رُو سے $\text{ا}_\text{ن}\,\text{ب}_\text{ن}$ کی انتہا اب ہے۔ اس سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

نوٹ۔ مسئلہ ۳ کی طرح اس مسئلہ کو بھی دو سے زیادہ تواتروں کے لیے وسیع کیا جا سکتا ہے، یعنی تواتروں کی کسی تعداد کے حاصل ضرب کی انتہا، انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

مثال۔ $\text{ا}_\text{ن} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{ن}}\right)$، $\text{ب}_\text{ن} = \frac{3\text{ن}^2 - 1}{4\text{ن}^2} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4\text{ن}^2}\right)$

$$\text{ا}_\text{ن}\,\text{ب}_\text{ن} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{ن}}\right)\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4\text{ن}^2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{3}{4\text{ن}} - \frac{1}{8\text{ن}^2} + \frac{1}{4\text{ن}^3}$$

لیکن چونکہ $\frac{3}{4\text{ن}} \to 0$، $\frac{1}{8\text{ن}^2} \to 0$، $\frac{1}{4\text{ن}^3} \to 0$

اس لیے $\text{ا}_\text{ن}\,\text{ب}_\text{ن} \to \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$

۱٫۴۵۔ مسئلہ ۵۔ اگر تواتر $\text{ا}_\text{ن}$ کی انتہا ا ہو اور ا کی قیمت صفر نہ ہو تو تواتر $\frac{1}{\text{ا}_\text{ن}}$ کی انتہا $\frac{1}{\text{ا}}$ ہوگی۔

چونکہ $\text{ا}_\text{ن}$ کی انتہا ا ہے اس لیے ن کی کافی بڑی قیمت کے لیے

$$\text{ا}_\text{ن} = \text{ا} + \text{صہ}_1 \quad \text{جہاں} \quad \text{نہا}_{\text{ن} \to \infty}\,\text{صہ}_1 = 0$$

اس لیے

$$\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} - \frac{1}{\text{ل}} = \frac{1}{\text{ل}+\text{صہ}_1} - \frac{1}{\text{ل}} = \frac{\text{ل}-\text{ل}-\text{صہ}_1}{\text{ل}(\text{ل}+\text{صہ}_1)} = \frac{-\text{صہ}_1}{\text{ل}(\text{ل}+\text{صہ}_1)}$$

$$\therefore \quad \left|\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} - \frac{1}{\text{ل}}\right| = \left|\frac{\text{صہ}_1}{\text{ل}(\text{ل}+\text{صہ}_1)}\right|$$

اب چونکہ صہ۱ کی انتہا صفر ہے اس لیے ن کی ایک قیمت نَ ایسی معلوم ہو سکتی ہے کہ نَ سے شروع کرکے باقی تمام ن کے لیے $\left|\frac{\text{صہ}_1}{\text{ل}(\text{ل}+\text{صہ}_1)}\right| < \text{صہ}$ جہاں صہ کوئی اختیاری چھوٹا عدد ہے۔ پس

$$\left|\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} - \frac{1}{\text{ل}}\right| < \text{صہ} \quad \text{جبکہ ن} \geq \text{نَ}$$

یعنے تعریف کے بموجب $\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}}$ کی انتہا $\frac{1}{\text{ل}}$ ہے۔

مثال۔ فرض کرو کہ $\text{ل}_\text{ن} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\text{ن}} = \frac{\text{ن}-2}{2\text{ن}}$

$$\frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} = \frac{2\text{ن}}{\text{ن}-2} = 2\,\frac{\text{ن}}{\text{ن}-2} = 2\left\{\frac{\text{ن}-2+2}{\text{ن}-2}\right\}$$

$$= 2\,\frac{\text{ن}-2}{\text{ن}-2} + 2\,\frac{2}{\text{ن}-2} = 2 + \frac{4}{\text{ن}-2}$$

تب

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ل}_\text{ن} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{ن}}\right) = \frac{1}{2}$$

اور

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{1}{\text{ل}_\text{ن}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(2 + \frac{4}{\text{ن}-2}\right) = 2$$

۱۴۶ء۱ - مسئلہ ۶ - اگر تواتر $\text{ل}_\text{ن}$ کی انتہا ل اور تواتر $\text{ب}_\text{ن}$ کی انتہا ب ہو اور ل $\neq 0$ تو تواتر $\frac{\text{ب}_\text{ن}}{\text{ل}_\text{ن}}$ کی انتہا $\frac{\text{ب}}{\text{ل}}$ ہوگی، یعنے دو تواتروں کے خارج قسمت کی انتہا، انتہاؤں کے خارج قسمت کے مساوی ہوگی۔

اس کا ثبوت مسئلہ (۴) اور مسئلہ (۵) کی مدد سے بآسانی مل سکتا ہے۔

چونکہ

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\ ل_ن = ل\ (\neq ۰)$$

اس لیے

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{۱}{ل_ن} = \frac{۱}{ل}\ \text{(مسئلہ (۵) کی رو سے)}$$

اب چونکہ

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\ ب_ن = ب \text{ اور } \underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{۱}{ل_ن} = \frac{۱}{ل}$$

اس لیے

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\left\{ب_ن \times \frac{۱}{ل_ن}\right\} = ب \times \frac{۱}{ل}\ \text{(مسئلہ (۴) کی رو سے)}$$

جس سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

مثال۔ فرض کرو کہ $ل_ن = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{ن}$ ، $ب_ن = \frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴ن^۲}$

پس $$\frac{ب_ن}{ل_ن} = \left(\frac{۳}{۴} - \frac{۱}{۴ن^۲}\right) \div \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{ن}\right) = \left(\frac{۳ن^۲-۱}{۴ن^۲}\right) \div \left(\frac{ن-۲}{۲ن}\right)$$

$$= \frac{۳ن^۲-۱}{۴ن^۲} \times \frac{۲ن}{ن-۲} = \frac{۳ن^۲-۱}{۲ن(ن-۲)} = \frac{۳ن^۲-۱}{۲ن^۲-۴ن}$$

$$= \frac{ن^۲\left(۳-\frac{۱}{ن^۲}\right)}{ن^۲\left(۲-\frac{۴}{ن}\right)} = \frac{۳-\frac{۱}{ن^۲}}{۲-\frac{۴}{ن}}$$

پس $$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\ \frac{ب_ن}{ل_ن} = \frac{۳}{۲} = \frac{۳}{۴} \div \frac{۱}{۲}$$

مشقی سوالات ۳

ذیل کے تواتروں کی انتہائیں دریافت کرو۔

(۱) $\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۳^۳}+\cdots+\frac{۱}{۳^ن}$

(۲) $\frac{ن^۲+۱}{۳ن^۲-۴ن+۵}$

(۳) $\frac{۱+۲+۳+\cdots+ن}{(ن-۱)^۲}$

(۴) $\frac{۱^۲+۲^۲+\cdots+ن^۲}{ن^۳}$

(۵) $\frac{۱^۳+۲^۳+\cdots+ن^۳}{ن^۴}$

(۶) $(-۱)^ن+۲^{-ن}$

(۷) لاتناہی سلسلہ $۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۲}+\cdots$ کا حاصل جمع دریافت کرو

(۸) لاتناہی سلسلہ $\frac{۳}{۱۰}+\frac{۳}{۱۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰۰}+\frac{۳}{۱۰۰۰۰}+\cdots$ کا حاصل جمع دریافت کرو۔

۱ء۷۴ - نوٹ - استدقاق کا عام اصول -

مندرجۂ بالا آسان مثالوں میں جن کا ہم نے خاص طور پر انتخاب کیا ہے تواتر جس انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے وہ انتہا محض دیکھنے سے واضح ہو جاتی ہے۔ لیکن عام صورت میں یہ سوال اس قدر آسان نہیں ہے اور ایک دیے ہوئے تواتر کے متعلق یہی بات دریافت طلب اور اہم ہوتی ہے کہ آیا اس تواتر کی کوئی انتہا بھی ہے یا نہیں۔ دفعہ ۱ء۱۳ میں انتہا کی جو تعریف دی گئی ہے وہ اُس وقت کام دیتی ہے جبکہ ہم کو کسی طریقہ سے انتہا کی قیمت معلوم ہو۔ عام تواتر کے

استدقاق یا عدم استدقاق کے دریافت کرنے کے لیے یہ تعریف معیار کا کام نہیں دے سکتی بلکہ اس کے لیے حسب ذیل خاصیت سے فائدہ اٹھایا جاتا ہے:—

فرض کرو کہ تواتر

$$\text{ل}_{\text{۱}}،\ \text{ل}_{\text{۲}}،\ \text{ل}_{\text{۳}}،\ \dots،\ \text{ل}_{\text{ن}}،\ \dots\dots \quad (\text{۱})$$

مستدق ہے اور اس کی انتہا ل ہے (یہاں ل کی ٹھیک قیمت سے بحث نہیں اور اس لیے ل کا معلوم ہونا ضروری نہیں ہے، کوئی حرف اس کام کو پورا کر سکتا ہے)۔

اب اگر صہ کوئی اختیاری چھوٹا مثبت عدد دیا ہوا ہو تو تعریف کے بموجب ایک مثبت صحیح عدد ن ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ $\text{ل}_{\text{ن}}$ سے شروع کر کے باقی تمام ارکان کے لیے $\text{ل}_{\text{ن}}$ اور ل کا فرق $\frac{\text{صہ}}{\text{۲}}$ سے چھوٹا ہو یعنی

$$|\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}| < \frac{\text{صہ}}{\text{۲}} \quad \dots\dots (\text{۲})$$

اور

$$|\text{ل}_{\text{ن}+\text{۱}} - \text{ل}| < \frac{\text{صہ}}{\text{۲}}،\ |\text{ل}_{\text{ن}+\text{۲}} - \text{ل}| < \frac{\text{صہ}}{\text{۲}}،\ |\text{ل}_{\text{ن}+\text{۳}} - \text{ل}| < \frac{\text{صہ}}{\text{۲}} \dots\dots (\text{۳})$$

پس

$$|\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}_{\text{ن}+\text{۱}}| = |(\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}) - (\text{ل}_{\text{ن}+\text{۱}} - \text{ل})|$$

$$\leqslant |\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}| + |\text{ل}_{\text{ن}+\text{۱}} - \text{ل}|$$

$$< \frac{\text{صہ}}{\text{۲}} + \frac{\text{صہ}}{\text{۲}}$$

$$< \text{صہ}$$

اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$|\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}_{\text{ن}+\text{۲}}| < \text{صہ}$$

$$|\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}_{\text{ن}+\text{۳}}| < \text{صہ}$$

$|\text{ل}_{\text{ن}} - \text{ل}_{\text{ن}+\text{م}}| < \text{صہ}$، جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے چاہے کتنا ہی بڑا ہو۔

یعنے اگر تواتر ($ل_{1}$، $ل_{2}$، ...، $ل_{ن}$، ...) مستدق ہے تو کسی چھوٹے عدد صہ کے لیے ایک رکن $ل_{ج}$ ایسا معلوم کیا جاسکتا ہے کہ $ل_{ن}$ سے شروع کر کے اور بعد کے تمام ارکان کے لیے یہ خاصیت پائی جاتی ہے کہ $ل_{ن}$ اور ان میں سے کسی رکن کا فرق صہ سے چھوٹا ہوگا یعنے $|ل_{ن} - ل_{ن+1}|$، $|ل_{ن} - ل_{ن+2}|$، $|ل_{ن} - ل_{ن+3}|$، .... وغیرہ میں سے ہر ایک صہ سے چھوٹا ہوگا۔ اور چونکہ ہر اختیاری چھوٹے عدد صہ کے لیے یہ خاصیت صحیح ہے اس لیے ہر مستدق تواتر کے لیے ہم ایک رکن $ل_{ن}$ کا ایسا انتخاب کرسکتے ہیں کہ $ل_{ن}$ اور بعد کے کسی رکن کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا ہو جائے۔

اس کے برعکس اگر کسی تواتر ($ل_{1}$، $ل_{2}$، ...، $ل_{ن}$، ...) میں یہ خاصیت پائی جائے کہ ہر چھوٹے مثبت عدد صہ کے لیے ایک رکن $ل_{ن}$ ایسا معلوم ہوسکے کہ $ل_{ن}$ اور بعد کے کسی رکن کا فرق صہ سے چھوٹا ہو جائے تو یہ تواتر مستدق ہوگا۔

یہی استدقاق کا عام اصول ہے اور اس کو معیار کے طور پر استعمال کر کے ہم معلوم کرسکتے ہیں کہ آیا کوئی تواتر مستدق ہے یا نہیں۔

مبتدیوں کو اس خاصیت کے استعمال کرنے کی زیادہ ضرورت لاحق نہیں ہوگی۔ ان کو جن تواتروں سے سابقہ پڑتا ہے وہ اس قدر آسان ہونگے کہ ان کی انتہا محض جانچنے سے معلوم ہوسکتی ہے۔

۱۵- مسلسل متغیر کے تفاعل کی انتہا

۱۵ء۱- اب تک ہم نے تواتروں یعنے ایک غیر مسلسل متغیر ن کے تفاعلوں $ل_{ن}$ کی انتہا سے بحث کی ہے۔ لیکن ایک مسلسل متغیر لا کے تفاعل ف (لا) کے متعلق بھی ہم کو اکثر انتہا کے مفہوم سے سابقہ پڑتا ہے اس لیے اب ہم تفاعل ف (لا) کی انتہا کی تشریح کرینگے۔

فرض کرو کہ ف (لا) کی ترسیم کے ذریعہ ف (لا) کی قیمتوں کو ہم ایک منحنی کی شکل میں تعبیر کرتے ہیں اور ایک نقطہ ن جس کا فصلہ لا ہے

منحنی پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ فصلہ لا بتدریج ایک ثابت عدد ج کے قریب تر آتا جاتا ہے۔ اب ایسا ہو سکتا ہے کہ تفاعل کی قیمت ف (لا) بھی ایک انتہا کے قریب آتی جائے۔ انتہا کے اس مفہوم کو ایک تواتر کی انتہا کے ساتھ ہم حسب ذیل طریقہ پر مربوط کر سکتے ہیں۔

"لا مائل بہ ج" کے معنی — فرض کرو کہ لا ایک مسلسل متغیر ہے اور ج ایک ثابت عدد ہے۔ فرض کرو کہ لا یکے بعد دیگرے قیمتوں لا$_{۱}$، لا$_{۲}$، ....، لا$_{ن}$ ... کو اختیار کرتا ہے جن میں سے سب کے سب ج سے مختلف ہیں لیکن نہا$_{ن \to \infty}$ لا$_{ن}$ = ج یعنے یہ قیمتیں اس طرح کی ہیں کہ لا$_{ن}$ کی انتہا ج ہے۔ اس کو ہم یوں بھی بیان کرتے ہیں "لا مائل بہ ج ہے" اور علامتوں میں اس کو لا ← ج سے تعبیر کرتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم لا کو یکے بعد دیگرے قیمتیں $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۴}{۵}$، ....، $\frac{ن-۱}{ن}$، ....

دیں تو چونکہ $\frac{ن-۱}{ن}$ کی انتہا ۱ ہے اس لیے ہم اس کو یوں بھی بیان کر سکتے ہیں کہ لا ← ۱ ہے۔ یعنے گویا ہم لا کی قیمت کو بڑھا کر بتدریج ۱ کے قریب لا رہے ہیں۔ لا کو ۱ کی طرف مائل کرنے کے لیے ہم لا کی قیمتوں کے اس تواتر کو دوسری طرح سے بھی منتخب کر سکتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم لا کو یکے بعد دیگرے حسب ذیل قیمتیں دیں:—

۲، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۴}{۳}$، $\frac{۵}{۴}$، $\frac{۶}{۵}$ ....، $\frac{ن+۱}{ن}$، ....

اس لیے ظاہر ہے کہ ہم تواتر لا$_{۱}$، لا$_{۲}$، ....، لا$_{ن}$ .... کا مختلف طریقوں سے انتخاب کر سکتے ہیں اور ہر صورت میں لا$_{ن}$ کی انتہا ج ہوگی یعنے لا ← ج ہوگا۔

تفاعل کی انتہا — لا کی ان قیمتوں کے جواب میں تفاعل ف (لا) کی قیمتوں کے لیے ذیل کا تواتر ملیگا۔

ف (لا₁)، ف (لا₂)، ف (لا₃) . . . ف (لان)، . . . .

اب اگر تواتر لا₁، لا₂، . . .، لان . . . کے ہر انتخاب کے لیے تفاعل کی قیمتوں کے تواتر ف (لان) کی انتہا ل موجود ہو اور ہر صورت میں وہی ل ہو یعنے لان کے مختلف انتخاب کے لیے یہ انتہا مختلف نہ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ جب لا مائل بہ ج ہو تو تفاعل ف (لا) کی انتہا ل ہے اور علامتوں میں اس کو یوں تعبیر کرتے ہیں:

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ج}}\ \text{ف (لا)} = \text{ل}$$

۵۲ د ا - انتہا کی دوسری تعریف ــــ چونکہ انتہا کا مفہوم علم احصا میں سب سے زیادہ اہم ہے اس لیے طالب علم کے ذہن نشین کرانے کے لیے ہم اس کی ایک اور تعریف کرینگے جو اوپر کی تعریف کے بالکل معادل ہے۔

ف (لا) کی انتہا جبکہ لا مائل بہ ج ہو ل اس وقت ہوگی اگر صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا عدد ہو تو نقطہ ج کے کافی قریب (یعنی فاصلہ ضہ پر) کے کسی نقطہ پر تفاعل کی قیمت اور ل کا فرق صہ سے چھوٹا ہو یعنے مختصر الفاظ میں ف (لا) کی انتہا جبکہ لا ← ج ہو ل ہوگی اگر ج کے کافی قریب کسی نقطہ پر تفاعل کی قیمت ف (لا) اور ل کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا ہو سکے۔

انتہا کی تعریف میں یہ بات قابل غور ہے کہ ہم نقطۂ لا کو نقطہ ج پر کبھی منطبق نہیں کرتے بلکہ اس کے جتنا چاہیں قریب لے آتے ہیں لیکن پھر بھی نقطۂ لا نقطۂ ج سے مختلف ہی ہوتا ہے۔ یعنی بالفاظ دیگر نقطہ ج پر تفاعل کی قیمت ف (ج) کو نہا$_{\text{لا}\to\text{ج}}$ ف (لا) سے بالعموم کوئی تعلق نہیں ہے۔ ف (ج) کی کیا قیمت ہے اس سے ہم کو یہاں بحث نہیں ہے۔ یہاں انتہا کے مفہوم میں سوال صرف یہ ہے کہ اگر ہم لا کو بتدریج عدد ج کے قریب لاتے جائیں (لیکن ہر صورت میں ج سے مختلف ہی رکھیں، چاہے یہ فرق کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو) تو کیا ف (لا) ایک محدود عدد ل کے قریب آتا ہے یا نہیں۔ بعض صورتوں میں ممکن ہے کہ یہ انتہا اور تفاعل کی قیمت ف (ج) دونوں ایک ہی ہوں۔ لیکن

یہ محض حسنِ اتفاق ہے جو صرف چند خاص قسم کے تفاعلوں کے لیے واقع ہوگا جن کی ہم آیندہ تخصیص کرینگے - عام طور پر یا تو ف (ج) کی قیمت غیر معین ہوگی یا ل سے مختلف ہوگی۔

دوسری اہم بات جو انتہا کی تعریف میں یاد رکھنی چاہیے یہ ہے کہ نقطۂ لا کو نقطۂ ج کی طرف سیدھی یا بائیں طرف جدھر سے چاہیں لا سکتے ہیں، ہر صورت میں وہی انتہا ل حاصل ہونی چاہیے۔

مثال ۱- ف (لا) = ۳ لا^{۲} ، ج = ۱٫۵ ، ل = ۶٫۷۵

یعنے تفاعل ۳ لا^{۲} کی انتہا جبکہ لا ← ۱٫۵ ہو ۶٫۷۵ ہے۔

اس کو ہم یوں ثابت کر سکتے ہیں کہ (۶٫۷۵ - ۳ لا^{۲}) جتنا چاہیں چھوٹا ہو سکتا ہے بشرطیکہ لا کو ۱٫۵ کے کافی قریب لیا جائے۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ان دونوں کا فرق صہ سے چھوٹا کرنا چاہیے جہاں صہ کوئی چھوٹا مثبت عدد ہے۔ ہم دریافت کر سکتے ہیں کہ ۱٫۵ کے قریب لا کی کون سی قیمت لی جائے کہ ۶٫۷۵ - ۳ لا^{۲} کا فرق صہ سے چھوٹا ہو جائے؛ فرض کرو کہ لا = ۱٫۵ - ھ تو گویا دریافت کرنا یہ ہے کہ ھ زیادہ سے زیادہ کس قدر ہو سکتا ہے کہ (۶٫۷۵ - ۳ لا^{۲}) < صہ،

پس

۶٫۷۵ - ۳ (۱٫۵ - ھ)^{۲} < صہ

یعنے ۹ ھ - ۳ ھ^{۲} < صہ

یعنے

۰ < ۳ ھ^{۲} - ۹ ھ + صہ

< ھ^{۲} - ۳ ھ + صہ/۳

< {ھ - (۳ + √(۹ - ۴/۳ صہ))/۲} {ھ - (۳ - √(۹ - ۴/۳ صہ))/۲}

اس کے لیے ظاہر ہے کہ ہ کو $\frac{\sqrt{۹ - \frac{۴}{۳}\text{صہ}} - ۳}{۲}$ سے کم ہونا چاہیے۔

یعنے اگر لا کو ہم ۱٫۵ - $\frac{\sqrt{۹ - \frac{۴}{۳}\text{صہ}} - ۳}{۲}$ کے درمیان کچھ ہی لیں

(۶٫۷۵ - ۳ $\text{لا}^{۲}$) کا فرق صہ سے کم ہوگا۔ صہ جس قدر چھوٹا ہوتا ہے ہ بھی

چھوٹا ہوتا چلا جاتا ہے لیکن پھر بھی صفر سے مختلف ہوتا ہے۔ پس

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to ۱٫۵} \; ۳\,\text{لا}^{۲} = ۶٫۷۵$$

اس خاص مثال میں تفاعل ۳ $\text{لا}^{۲}$ کی قیمت نقطۂ لا = ۱٫۵ پر ۳ × $(۱٫۵)^{۲}$ = ۶٫۷۵ ہے۔
یعنے اس مثال میں انتہا اور قیمت دونوں ایک ہی ہیں۔

مثال ۲ - $\text{نہا}_{\text{لا} \to ۳} \frac{\text{لا}^{۲} - ۹}{\text{لا} - ۳}$

نقطۂ لا = ۳ پر تفاعل $\frac{\text{لا}^{۲} - ۹}{\text{لا} - ۳}$ کی قیمت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہو جاتی ہے۔ جو غیر معین ہے
کیونکہ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کا حاصل کوئی محدود عدد ہو سکتا ہے اس لیے کہ چاہے کسی محدود
عدد کو صفر سے ضرب دیا جائے حاصل ضرب صفر ہی ہوگا۔

اب ہم $\frac{\text{لا}^{۲} - ۹}{\text{لا} - ۳}$ کی انتہا دریافت کرتے ہیں جبکہ متغیر لا نقطۂ ۳ کے
قریب پہنچتا ہے۔ اس کے لیے ہم لا کی ایسی قیمتیں رکھتے ہیں جو بتدریج
۳ کے قریب آتی ہیں اور ان کے جواب میں ما = $\frac{\text{لا}^{۲} - ۹}{\text{لا} - ۳}$ کی قیمتوں پر
غور کرتے ہیں۔ مثلاً

اگر لا = ۲٫۹ تو ما = ۵٫۹
اگر لا = ۲٫۹۹ تو ما = ۵٫۹۹
اگر لا = ۲٫۹۹۹ تو ما = ۵٫۹۹۹
اگر لا = ۲٫۹۹۹۹ تو ما = ۵٫۹۹۹۹
اگر لا = ۲٫۹۹۹۹۹ تو ما = ۵٫۹۹۹۹۹
اگر لا = ۲٫۹۹۹۹۹۹ تو ما = ۵٫۹۹۹۹۹۹

وغیرہ

اسی طرح اگر ہم لا کی ایسی قیمتیں لیں جو سیدھی طرف سے ۳ کے قریب آتی ہیں تو

ملتا ہے:-

اگر لا = ۳٫۱ تو ما = ۶٫۱
اگر لا = ۳٫۰۱ تو ما = ۶٫۰۱
اگر لا = ۳٫۰۰۱ تو ما = ۶٫۰۰۱
اگر لا = ۳٫۰۰۰۱ تو ما = ۶٫۰۰۰۱
اگر لا = ۳٫۰۰۰۰۱ تو ما = ۶٫۰۰۰۰۱
اگر لا = ۳٫۰۰۰۰۰۱ تو ما = ۶٫۰۰۰۰۰۱

وغیرہ

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ چاہے لا بائیں طرف سے یا سیدھی طرف سے ۳ کی طرف مائل ہو $\frac{\text{لا}^2 - \text{۹}}{\text{لا} - \text{۳}}$ کی قیمت ۶ کے قریب آتی جا رہی ہے اور اگر ہم لا کو ۳ کے کافی قریب لیں تو $\frac{\text{لا}^2 - \text{۹}}{\text{لا} - \text{۳}}$ کو ۶ کے جس قدر چاہیں قریب لا سکتے ہیں۔ پس معلوم ہوتا ہے کہ انتہا ۶ ہے یعنے

$$\underset{\text{لا} \to \text{۳}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^2 - \text{۹}}{\text{لا} - \text{۳}} = \text{۶}$$

اس انتہا کو ہم دوسری طرح یوں معلوم کر سکتے ہیں:—

اگر ہم لا کو بالکل ۳ کے مساوی رکھیں تو ہم نے دیکھا ہے کہ تفاعل ما کی قیمت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ حاصل ہوتی ہے جو بے معنی ہے اس لیے ہم لا کو ۳ سے کسی قدر مختلف رکھتے ہیں مثلاً لا = ۳ + ھ جہاں ھ مثبت یا منفی کوئی چھوٹا عدد ہے، ظاہر ہے کہ جب لا مائل بہ ۳ ہو تو ھ مائل بہ صفر ہوتا ہے۔ نیز چونکہ لا کی قیمت کبھی بالکل ۳ کے مساوی نہیں ہوتی اس لیے ھ کبھی بالکل صفر کے مساوی نہیں ہوتا۔ پس

$$\text{ما} = \frac{\text{لا}^2 - \text{۹}}{\text{لا} - \text{۳}} = \frac{(\text{۳} + \text{ھ})^2 - \text{۹}}{(\text{۳} + \text{ھ}) - \text{۳}} = \frac{\text{۶ھ} + \text{ھ}^2}{\text{ھ}} = \text{۶} + \text{ھ}$$

اب ھ کو کافی چھوٹا کرنے یعنے لا کو ۳ کے کافی قریب لانے سے ہم ما کو جس قدر چاہیں ۶ کے قریب لا سکتے ہیں۔ جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ما کی انتہا ۶ ہے جبکہ لا ← ۳ ہو۔

مثال ۳- $\underset{\text{لا}\to ۲}{\text{نہا}} \dfrac{\sqrt{۳-\text{لا}}-\sqrt{\text{لا}-۱}}{۶-۳\,\text{لا}}$

اگر تفاعل $\text{ف}(\text{لا}) = \text{ما} = \dfrac{\sqrt{۳-\text{لا}}-\sqrt{\text{لا}-۱}}{۶-۳\,\text{لا}}$ میں لا کی بجائے ۲ رکھا جائے تو اس کی قیمت بھی $\dfrac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہو جاتی ہے اس لیے ف (لا) کی قیمت نقطۂ ۲ پر غیر معین ہے - اس لیے ہم پھر لا کی قیمت کو ۲ سے کسی قدر مختلف لیتے ہیں یعنے

$$\text{لا} = ۲ - \text{ھ}$$

رکھتے ہیں جہاں $\text{ھ} \to ۰$ جبکہ $\text{لا} \to ۲$ ہے یعنے جوں جوں لا عدد ۲ کے قریب آتا ہے اسی قدر ھ صفر کے قریب پہنچتا ہے - پس

$$\text{ما} = \frac{\sqrt{۳-۲+\text{ھ}}-\sqrt{۲-\text{ھ}-۱}}{۶-۳(۲-\text{ھ})} = \frac{\sqrt{۱+\text{ھ}}-\sqrt{۱-\text{ھ}}}{۳\,\text{ھ}}$$

اب چونکہ ھ کبھی بالکل صفر کے مساوی نہیں ہوتا اس لیے بائیں طرف کے جملہ کو اوپر اور نیچے $\sqrt{۱+\text{ھ}}+\sqrt{۱-\text{ھ}}$ سے ضرب دیتے ہیں تا کہ مقادیر اصم شمار کنندہ میں سے نکل جائیں۔

$$\text{ما} = \frac{(۱+\text{ھ})-(۱-\text{ھ})}{۳\,\text{ھ}\left\{\sqrt{۱+\text{ھ}}+\sqrt{۱-\text{ھ}}\right\}} = \frac{۲\,\text{ھ}}{۳\,\text{ھ}\left\{\sqrt{۱+\text{ھ}}+\sqrt{۱-\text{ھ}}\right\}}$$

$$= \frac{۲}{۳}\,\frac{۱}{\sqrt{۱+\text{ھ}}+\sqrt{۱-\text{ھ}}}$$

اب ظاہر ہے کہ ھ جس قدر چھوٹا ہوتا جائے گا اسی قدر جملہ $\dfrac{۱}{\sqrt{۱+\text{ھ}}+\sqrt{۱-\text{ھ}}}$ کی قیمت $\frac{۱}{۲}$ کے قریب آئیگی پس جس قدر ھ چھوٹا

ہوتا جائیگا اسی قدر ما کی قیمت $\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲}$ یعنے $\frac{۱}{۳}$ کے قریب آتی جائے گی۔
اس لیے مطلوبہ انتہا $\frac{۱}{۳}$ ہے یعنے

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to ۲} \frac{\sqrt{۳ - \text{لا}} - \sqrt{\text{لا} - ۱}}{۶ - ۳\,\text{لا}} = \frac{۱}{۳}$$

۱۵۳۔ مسئلہ ۱ — اگر ما $= \frac{۱}{\text{لا}}$ اور لا $\to ۰$ تو ما $\to \infty$

یعنے الفاظ میں ہم اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اگر لا کی ہم کافی چھوٹی قیمت لیں تو ما کو جس قدر چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ گ کوئی بڑا عدد مثلاً (۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰) ہے اور ہم چاہتے ہیں کہ ما اس عدد سے بھی بڑا ہو جائے۔ چونکہ لا کی انتہا صفر ہے اس لیے ہم لا کو جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ مثلاً ہم لا کو (۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۱) سے چھوٹا لیتے ہیں تب ما دیے ہوئے عدد گ سے بڑا ہو جائیگا۔

مسئلہ ۲۔ اگر ما $= \frac{۱}{\text{لا}}$ اور لا $\to \infty$ تو ما $\to ۰$۔ یعنے

اگر لا کی قیمت کو ہم کافی بڑا لیں تو ما کی قیمت کو جس قدر چاہیں کم کر سکتے ہیں۔
مثلاً اگر ہم ما کی قیمت (۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۱) سے چھوٹی کرنی چاہیں تو لا کو (۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰) سے بڑا لینا کافی ہوگا۔

مسئلہ ۳ — اگر ما $=$ − لا اور لا $\to +\infty$ تو ما $\to -\infty$؛

یعنے اگر ہم لا اور ما کی قیمتوں کو بالترتیب دو خطوطِ مستقیم ا اور ب سے تعبیر کریں

ا ن
و
ب
ن
وَ

اور دونوں خطوں پر مبداء و (لا $=۰$)، اور وَ (ما $=۰$) ہوں تو خط ا پر

مبداء و سے سیدھی طرف بہت دور فاصلہ پر ایک نقطہ ن کے جواب میں خط ب پر مبداء وَ سے بائیں طرف بہت دور فاصلہ پر ایک نقطہ نَ ملیگا۔

ان مسائل کی مدد سے ہم تفاعلوں کی انتہا دریافت کرسکتے ہیں جبکہ $\text{لا} \to +\infty$ یا $\text{لا} \to -\infty$ ہو۔

مثال ۱- $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{1}{4\,\text{لا}^2}$

رکھو $\text{ما} = \frac{1}{\text{لا}}$ پس $\frac{1}{4\,\text{لا}^2} = \frac{1}{4\left(\frac{1}{\text{ما}}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\text{ما}^2$

نیز ہم کو مسئلہ ۲ سے معلوم ہے کہ اگر $\text{لا}\to\infty$ تو $\text{ما}\to 0$۔

پس

$$\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{1}{4\,\text{لا}^2} = \underset{\text{ما}\to 0}{\text{نہا}} \frac{1}{4}\,\text{ما}^2 = 0$$ (کیونکہ $\text{ما}^2 \to 0$ جبکہ $\text{ما}\to 0$)

مثال ۲- $\underset{\text{لا}\to-\infty}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{لا}^3+2}{2\,\text{لا}^3}\right)$

رکھو $\text{ما} = -\text{لا}$ اور $\text{ما}\to+\infty$ جبکہ $\text{لا}\to-\infty$

پس

$$\underset{\text{لا}\to-\infty}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{لا}^3+2}{2\,\text{لا}^3}\right) = \underset{\text{ما}\to\infty}{\text{نہا}} \left\{\frac{(-\text{ما})^3+2}{2(-\text{ما})^3}\right\} = \underset{\text{ما}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{-\text{ما}^3+2}{-2\,\text{ما}^3}$$

$$= \underset{\text{ما}\to\infty}{\text{نہا}} \left(\frac{-\text{ما}^3}{-2\,\text{ما}^3} + \frac{2}{-2\,\text{ما}^3}\right)$$

$$= \underset{\text{ما}\to\infty}{\text{نہا}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\text{ما}^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

۴۵ء۱- مسئلہ — اگر ف(لا) اور فہ(لا) کوئی دو تفاعل ہوں اور اگر $\underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہا}}\ \text{ف}(\text{لا}) = \text{ل}$، $\underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہا}}\ \text{فہ}(\text{لا}) = \text{م}$ تو

$$(۱)\quad \underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہا}} \left\{ \text{ف}(\text{لا}) + \text{فہ}(\text{لا}) \right\} = \text{ل} + \text{م}$$

$$(۲)\quad \underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہا}} \left\{ \text{ف}(\text{لا}) - \text{فہ}(\text{لا}) \right\} = \text{ل} - \text{م}$$

$$(۳)\quad \underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہا}}\ \text{ف}(\text{لا}) \times \text{فہ}(\text{لا}) = \text{ل} \times \text{م}$$

$$(۴)\quad \underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہا}} \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{فہ}(\text{لا})} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} \quad (\text{بشرطیکہ م} \neq ۰)$$

ان مسائل کا ثبوت اسی طریقہ پر دیا جا سکتا ہے جیسا کہ ہم نے دفعہ ۴ء۱ میں دو تواتروں کے لیے دیا ہے۔ ہم یہاں صرف مسئلہ (۱) یعنے حاصل جمع کے لیے یہ ثبوت دینگے۔ باقی تین مسئلوں کے لیے طالب علم کو یہ ثبوت بطور مشق خود فراہم کرنا چاہیے۔

چونکہ ف (لا) کی انتہا جبکہ لا ← ج ہو ل ہے اس لیے اگر ہم لا کو ج کے کافی قریب لیں تو ف (لا) اور ل کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں، مثلاً فرض کرو کہ اگر لا کو ج کے قریب بقدر ہ سے کم کے لایا جائے تو ف (لا) اور ل کا فرق $\frac{\text{صہ}}{۲}$ سے چھوٹا ہو جاتا ہے یعنے

$|\text{ف}(\text{لا}) - \text{ل}| < \frac{\text{صہ}}{۲}$ جہاں صہ ایک اختیاری چھوٹا عدد ہے۔

اس طرح فرض کرو کہ اگر لا کو ج کے قریب بقدر ک سے کم کے لایا جائے تو فہ (لا) اور م کا فرق بھی $\frac{\text{صہ}}{۲}$ سے چھوٹا ہو جاتا ہے یعنے

$$|\text{فہ}(\text{لا}) - \text{م}| < \frac{\text{صہ}}{۲}$$

ان میں ہ اور ک دو چھوٹے مثبت عدد ہونگے۔ ان دونوں میں سے جو کوئی بھی چھوٹا ہو اس کو ضہ سے تعبیر کرو۔ تو اگر اب لا کو ج کے قریب بقدر ضہ سے کم کے لایا جائے تو اس نقطہ کے لیے اوپر کی نامساواتیں

بیک وقت پوری ہونگی اور اس لیے

|ف (لا) - ل| + |فہ (لا) - م| < صہ

بشرطیکہ لا اور ج کا فرق ضہ سے کم ہو۔ پس چونکہ

|{ف (لا) + فہ (لا)} - (ل + م)| ≤ |ف (لا) - ل| + |فہ (لا) - م|

< صہ

اس لیے

نہا$_{\text{لا} \to \text{ج}}$ {ف (لا) + فہ (لا)} = ل + م

اس مسئلہ کا حسب ذیل دوسرا ثبوت بھی دیا جا سکتا ہے جو اگرچہ اس قدر مکمل نہیں ہے لیکن زیادہ عام فہم ہے۔

چونکہ ف (لا) کی انتہا ل ہے جبکہ لا ← ج ہو اس لیے لا کو ج کے کافی قریب لانے پر ہم لکھ سکتے ہیں۔

ف (لا) = ل + صہ$_1$

جہاں صہ$_1$ کی قیمت لا پر منحصر ہوگی اور صہ$_1$ ← ۰ جبکہ لا ← ج یعنی لا کو ج کے کافی قریب لانے پر صہ$_1$ کو کافی چھوٹا کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح

فہ (لا) = م + صہ$_2$

جہاں صہ$_2$ ← ۰ جبکہ لا ← ج ؛ پس

ف (لا) + فہ (لا) = (ل + صہ$_1$) + (م + صہ$_2$) = (ل + م) + (صہ$_1$ + صہ$_2$)

یعنی |{ف (لا) + فہ (لا)} - (ل + م)| = |صہ$_1$ + صہ$_2$|

اب ظاہر ہے کہ ہم لا کو ج کے اس قدر قریب لے سکتے ہیں کہ صہ$_1$ + صہ$_2$ کی مطلق قیمت جس قدر چاہیں چھوٹی ہو جائے یعنی صہ سے بھی چھوٹی ہو جائے پس

$$\underset{\text{لا}\to\text{ج}}{\text{نہا}}\left\{\text{ف (لا)} + \text{فہ (لا)}\right\} = \text{ل} + \text{م}$$

۱٫۵۵ - مثالیں -

مثال ۱ - اگر $\text{ف (لا)} = \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}} - ۲}{\text{لا} - ۱}$ تو $\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}}$ ف (لا) معلوم کرو -

ظاہر ہے کہ نقطۂ لا = ۱ پر تفاعل ف (لا) غیر معین ہے -

لیکن چند خاص نقطوں پر تفاعل کی قیمت کو ہم جدول کی شکل میں اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں :-

لا =	۱٫۱	۱٫۰۱	۱٫۰۰۱	۱٫۰۰۰۱	۱٫۰۰۰۰۱	۱٫۰۰۰۰۰۱
ف (لا) =	۱٫۴۸	۱٫۴۹۸	۱٫۴۹۹۸	۱٫۴۹۹۹۸	۱٫۴۹۹۹۹۸	۱٫۴۹۹۹۹۹۸

اگر لا کو بائیں طرف سے بتدریج ۱ کے قریب لایا جائے تو حسب ذیل جدول حاصل ہوتی ہے :-

لا =	۰٫۹	۰٫۹۹	۰٫۹۹۹	۰٫۹۹۹۹	۰٫۹۹۹۹۹	۰٫۹۹۹۹۹۹
ف (لا) =	۱٫۵۱	۱٫۵۰۱	۱٫۵۰۰۱	۱٫۵۰۰۰۱	۱٫۵۰۰۰۰۱	۱٫۵۰۰۰۰۰۱

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا مائل بہ ۱ ہو تو ف (لا) مائل بہ ۱٫۵ ہوتا ہے یعنے :

$$\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}} \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}} - ۲}{\text{لا} - ۱} = ۱٫۵$$

اسی انتہا کو ہم دوسری طرح سے حاصل کر سکتے ہیں - اگر لا کی قیمت سوائے ۱ کے کچھ ہی ہو تو ہم ف (لا) کو مختصر کر کے لکھتے ہیں :

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}} - ۲}{\text{لا} - ۱} = \frac{(\sqrt{\text{لا}} - ۱)(\sqrt{\text{لا}} + ۲)}{(\sqrt{\text{لا}} - ۱)(\sqrt{\text{لا}} + ۱)} = \frac{\sqrt{\text{لا}} + ۲}{\sqrt{\text{لا}} + ۱}$$

اب اگر ہم لا کو مائل بہ ا کریں تو آسانی سے ملتا ہے کہ $\frac{\sqrt{\text{لا}}+۲}{\sqrt{\text{لا}}+۱}$ کی انتہا ۵ء۱ ہے۔

مثال ۲- اگر ف (لا) = $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ تو $\underset{\text{لا} \leftarrow ۰}{\text{نہا}}$ ف (لا) معلوم کرو۔

چونکہ $\frac{\text{جب}(-\text{لا})}{-\text{لا}} = \frac{-\text{جب لا}}{-\text{لا}} = \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ یعنے چونکہ ف (-لا) = ف (لا)

اس لیے کسی ایک طرف کی قیمتوں سے لا کو صفر کی طرف مائل کرنا کافی ہے۔

مثلثی نسبتوں کی جدول سے ہم کو حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں:-

لا = درجوں میں	۱	۸ء	۶ء	۴ء	۲ء	۱ء
جب لا =	۰۱۷۵ء۰	۰۱۴۰ء۰	۰۱۰۵ء۰	۰۰۷۰ء۰	۰۰۳۵ء۰	۰۰۱۷ء۰

اس جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{\text{جب لا}}{\text{لا}}$ کی نسبت بتدریج ۱۷۰ء کی طرف مائل ہو رہی ہے جبکہ لا چھوٹا ہوتا چلا جا رہا ہے۔ اس لیے

$$\underset{\text{لا} \leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = ۰۱۷ء۰$$

نوٹ - یہ یاد رکھنا چاہیے کہ یہاں زاویہ لا کو ہم نے درجوں میں ناپا ہے۔ آگے باب دوم میں ہم ثابت کرینگے کہ اگر زاویہ طہ کو نیم قطریوں میں ناپا جائے تو

$$\underset{\text{طہ} \leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = ۱$$

اس سے ظاہر ہے کہ جس وقت لا کو درجوں میں ناپا جائے تو

$$\underset{\text{لا} \leftarrow ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}}{\text{لا}} = \frac{\pi}{۱۸۰} = ۰۱۷ء۰$$

ہونا چاہیے۔

مثال ۳- اگر ف (لا) = $\frac{\sqrt{۱ + \text{لا} + \text{لا}^۲} - \sqrt{۱ + \text{لا} - \text{لا}^۲}}{\text{لا}^۲}$ ہو تو

$\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \text{ف}(\text{لا})$ معلوم کرو۔ تفاعل ف (لا) کی قیمت نقطۂ لا = ۰ پر غیر معیّن ہے۔ لیکن اگر سوائے صفر کے لا کی قیمت کچھ ہی ہو تو

$$\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\left\{\sqrt{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}} - \sqrt{۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲}}\right\}}{\text{لا}^{۲}}$$

$$= \frac{\left\{\sqrt{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}} - \sqrt{۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲}}\right\}\left\{\sqrt{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}} + \sqrt{۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲}}\right\}}{\text{لا}^{۲}\left\{\sqrt{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}} + \sqrt{۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲}}\right\}}$$

$$= \frac{(۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}) - (۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲})}{\text{لا}^{۲}\left\{\sqrt{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}} + \sqrt{۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲}}\right\}}$$

$$= \frac{۲\,\text{لا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}\left\{\sqrt{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}} + \sqrt{۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲}}\right\}}$$

$$= \frac{۲}{\sqrt{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}} + \sqrt{۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲}}}$$

اس میں نسب نما ← ۲ جبکہ لا ← ۰ ۔ اس لیے تفاعل کی انتہا $\frac{۲}{۲} = ۱$ ہے

$$\text{پس}\ \underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\sqrt{۱+\text{لا}+\text{لا}^{۲}} - \sqrt{۱+\text{لا}-\text{لا}^{۲}}}{\text{لا}^{۲}} = ۱$$

مشقی سوالات ۴

ذیل کی انتہائیں معلوم کرو۔

(۱) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{۱ + ۳\,\text{لا}}{۲ - ۴\,\text{لا}}$

(۲) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \dfrac{۱+۳\,\text{لا}}{۲-۴\,\text{لا}}$

(۳) $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۲}+۱}{۳\,\text{لا}^{۲}+۷}$

(۴) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۲}+۱}{۳\,\text{لا}^{۲}+۷}$

(۵) $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱}$

(۶) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱}$

(۷) $\underset{\text{لا}\to۱}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۳}+\text{لا}^{۲}-\text{لا}-۱}{\text{لا}^{۲}-۳\,\text{لا}+۲}$

(۸) $\underset{\text{لا}\to-۳}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۲}+۵}{\text{لا}+۵}$

(۹) $\underset{\text{لا}\to۱}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۳}-۱}{\text{لا}-۱}$

(۱۰) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}(\text{لا}+۱)}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}+۳)}$

(۱۱) $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} \dfrac{\sqrt{۱+۲\,\text{لا}}-\sqrt{۱+\text{لا}}}{\text{لا}}$

(۱۲) $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} \dfrac{\sqrt{۱+۲\,\text{لا}^{۲}}-\sqrt{۱+۴\,\text{لا}^{۲}}}{\text{لا}^{۲}}$

(۱۳) $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} \dfrac{\sqrt[۳]{۱+\text{لا}}-\sqrt[۳]{۱-\text{لا}}}{\text{لا}}$

(۱۴) $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}+۲-۲\sqrt{\text{لا}+۱}}{\text{لا}^{۲}}$

(۱۵) $\underset{\text{ھ}\to۰}{\text{نہا}} \dfrac{(\text{لا}+\text{ھ})^{۳}-\text{لا}^{۳}}{\text{ھ}}$

(۱۶) $\underset{\text{لا}\to-۱}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۲}+۴\,\text{لا}+۳}{\text{لا}^{۲}-۷\,\text{لا}-۸}$

(۱۷) $\underset{\text{لا}\to۲}{\text{نہا}} \dfrac{\text{لا}^{۲}-۴}{\sqrt{\text{لا}+۲}-\sqrt{۳\,\text{لا}-۲}}$

(۱۸) $\lim\limits_{\text{لا}\to\text{و}} \dfrac{\text{لا}^۲ - \text{و}^۲}{\text{لا} - \text{و}}$

(۱۹) $\lim\limits_{\text{لا}\to\infty} \dfrac{۲\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} - ۱}{۳\text{لا}^۲ - ۲\text{لا} + ۱}$

(۲۰) $\lim\limits_{\text{لا}\to۰} \dfrac{۲\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} - ۱}{۳\text{لا}^۲ - ۲\text{لا} + ۱}$

(۲۱) $\lim\limits_{\text{لا}\to۰} \dfrac{۴\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} + ۲}{۵\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۳}$

(۲۲) $\lim\limits_{\text{لا}\to\infty} \dfrac{۴\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} + ۲}{۵\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۳}$

(۲۳) $\lim\limits_{\text{لا}\to۰} \dfrac{۲\text{لا} + ۱}{۲\text{لا}^۲ + ۱}$

(۲۴) $\lim\limits_{\text{لا}\to\infty} \dfrac{۲\text{لا} + ۱}{۲\text{لا}^۲ + ۱}$

(۲۵) $\lim\limits_{\text{لا}\to۰} \dfrac{۳\text{لا} + ۴}{\text{لا}^۲ - ۵\text{لا} + ۲}$

(۲۶) $\lim\limits_{\text{لا}\to\infty} \dfrac{۳\text{لا} + ۴}{\text{لا}^۲ - ۵\text{لا} + ۲}$

(۲۷) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \dfrac{\text{و}\,\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{ج}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲} + \dots + \text{ف}\,\text{لا} + \text{ق}}{\text{و}_۱\text{لا}^{\text{م}} + \text{ب}_۱\text{لا}^{\text{م}-۱} + \text{ج}_۱\text{لا}^{\text{م}-۲} + \dots + \text{ف}_۱\text{لا} + \text{ق}_۱}$

تو ثابت کرو کہ (۱) $\lim\limits_{\text{لا}\to۰} \text{ف}(\text{لا}) = \dfrac{\text{ق}}{\text{ق}_۱}$ ، (۲) $\lim\limits_{\text{لا}\to\infty} \text{ف}(\text{لا}) = \dfrac{\text{و}}{\text{و}_۱}$ اگر ن = م

(۳) $\lim\limits_{\text{لا}\to\infty} \text{ف}(\text{لا}) = ۰$ اگر م > ن

(۲۸) $\lim\limits_{\text{لا}\to\frac{\text{ط}}{۲}} \dfrac{۱ + \text{جس}\,\text{لا}}{۱ - \text{جس}\,\text{لا}}$

(۲۹) $\lim\limits_{\text{لا}\to۰} \dfrac{۱ - \text{جم}\,\text{لا}}{۱ + \text{جم}\,\text{لا}}$

(۳۰) $\lim\limits_{\text{لا}\to\infty} \text{لا}^۲$

(۳۱) $\lim\limits_{\text{لا}\to-\infty} ۲^{\text{لا}}$

(۳۲) $\lim\limits_{\text{لا}\to۰} \dfrac{۳\text{لا} - ۴\text{لا}^۲}{۲\text{لا} + \text{لا}^۲}$

(۳۳) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۰}} \dfrac{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{لا}^{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا}}$

(۳۴) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۰}} \dfrac{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا}}{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{لا}^{\text{۲}}}$

(۳۵) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۱}} \dfrac{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۳لا} + \text{۲}}{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۴لا} + \text{۳}}$

(۳۶) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۲}} \dfrac{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۶لا}^{\text{۲}} + \text{۱۱لا} - \text{۶}}{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۸}}$

(۳۷) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۲-}} \dfrac{\text{لا}^{\text{۳}} + \text{۸}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳لا} + \text{۲}}$

(۳۸) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۱}} \dfrac{\sqrt{\text{لا}} - \text{۱}}{\sqrt[\text{۳}]{\text{لا}} - \text{۱}}$

(۳۹) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۲}} \dfrac{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۵لا}^{\text{۲}} + \text{۸لا} - \text{۴}}{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{۴}}$

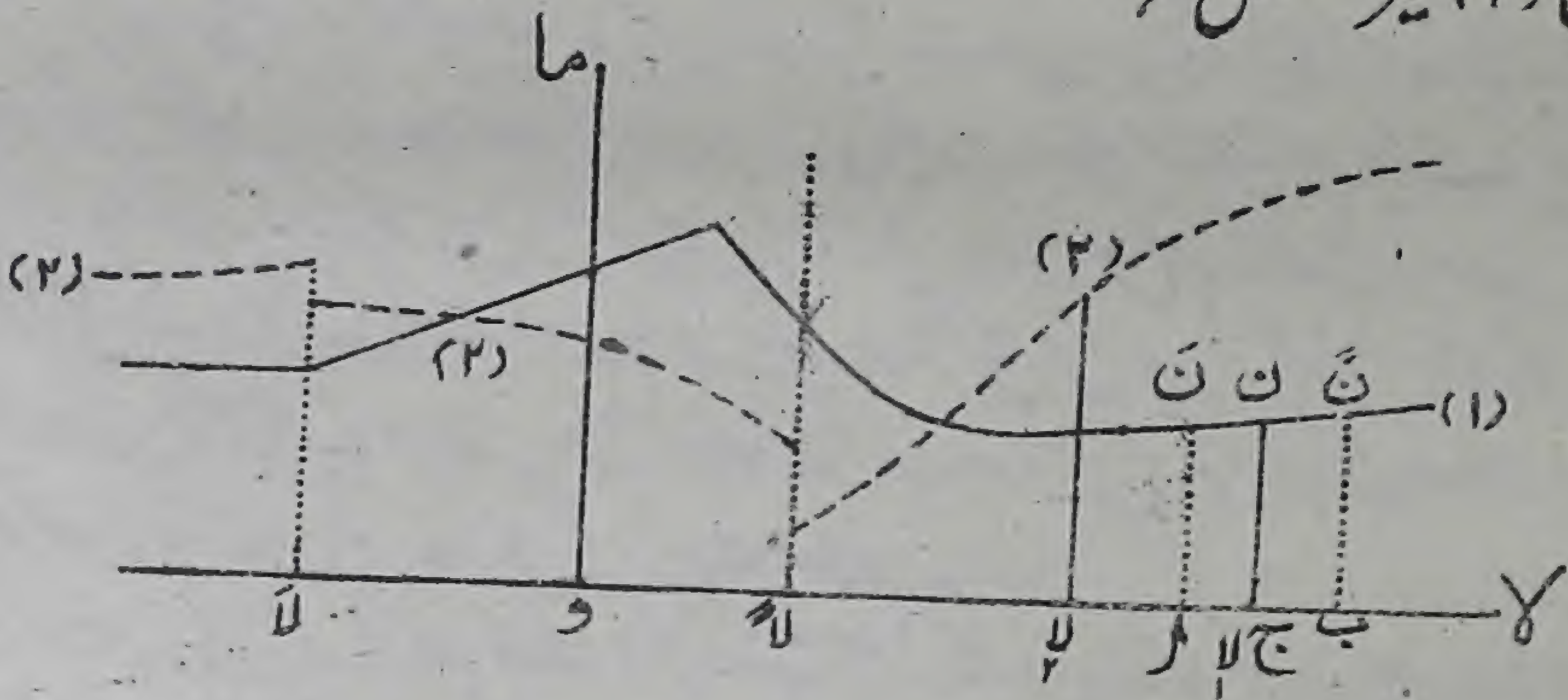
(۴۰) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۱}} \dfrac{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا} + \text{۱}}{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۳لا} + \text{۲}}$

(۴۱) $\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{۱-}} \dfrac{\text{لا}^{\text{۳}} + \text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{۳لا} + \text{۱}}{\text{۱} - \text{لا} - \text{۵لا}^{\text{۲}} - \text{۳لا}^{\text{۳}}}$

باب دوم

مسلسل تفاعل

۱ء۲۔ مسلسل تفاعل کی تعریف

۱ء۱ء۲۔ طالب علم کو یقیناً اس کا کسی قدر تصور ہوگا کہ ایک مسلسل منحنی سے کیا مراد ہے۔ مثلاً ذیل کی شکل میں طالب علم یہ کہیگا کہ منحنی (۱) مسلسل اور منحنی (۲) غیر مسلسل ہے۔

اسی طرح دفعہ ۱ء۲۳ میں ہم نے جن سادہ تفاعلوں ما = م لا، ما = لا^۲، ما = لا^۳، ما = لا^۴، ما = جب لا، ما = جم لا کے منحنی

کھینچے ہیں مسلسل ہیں لیکن ما = مس لا اور نا = تم لا کے منحنی غیر مسلسل ہیں۔

منحنی (۱) یا منحنی (۲) کسی کو ہم تفاعل ما = ف (لا) کی ترسیم تصور کر سکتے ہیں اور قدرتی طور پر ہمارا یہ خیال ہوتا ہے کہ ہم تفاعل ف (لا) کو مسلسل کہیں اگر اس کا ترسیمی منحنی مسلسل ہو اور تفاعل ف (لا) کو غیر مسلسل کہیں اگر اس کا ترسیمی منحنی غیر مسلسل ہو۔ یہ اگرچہ کوئی باضابطہ تعریف نہیں ہے لیکن سردست ہم اسی تعریف کو اختیار کرتے ہیں اور اس کی مدد سے باضابطہ تعریف اخذ کرنے کی کوشش کرینگے۔

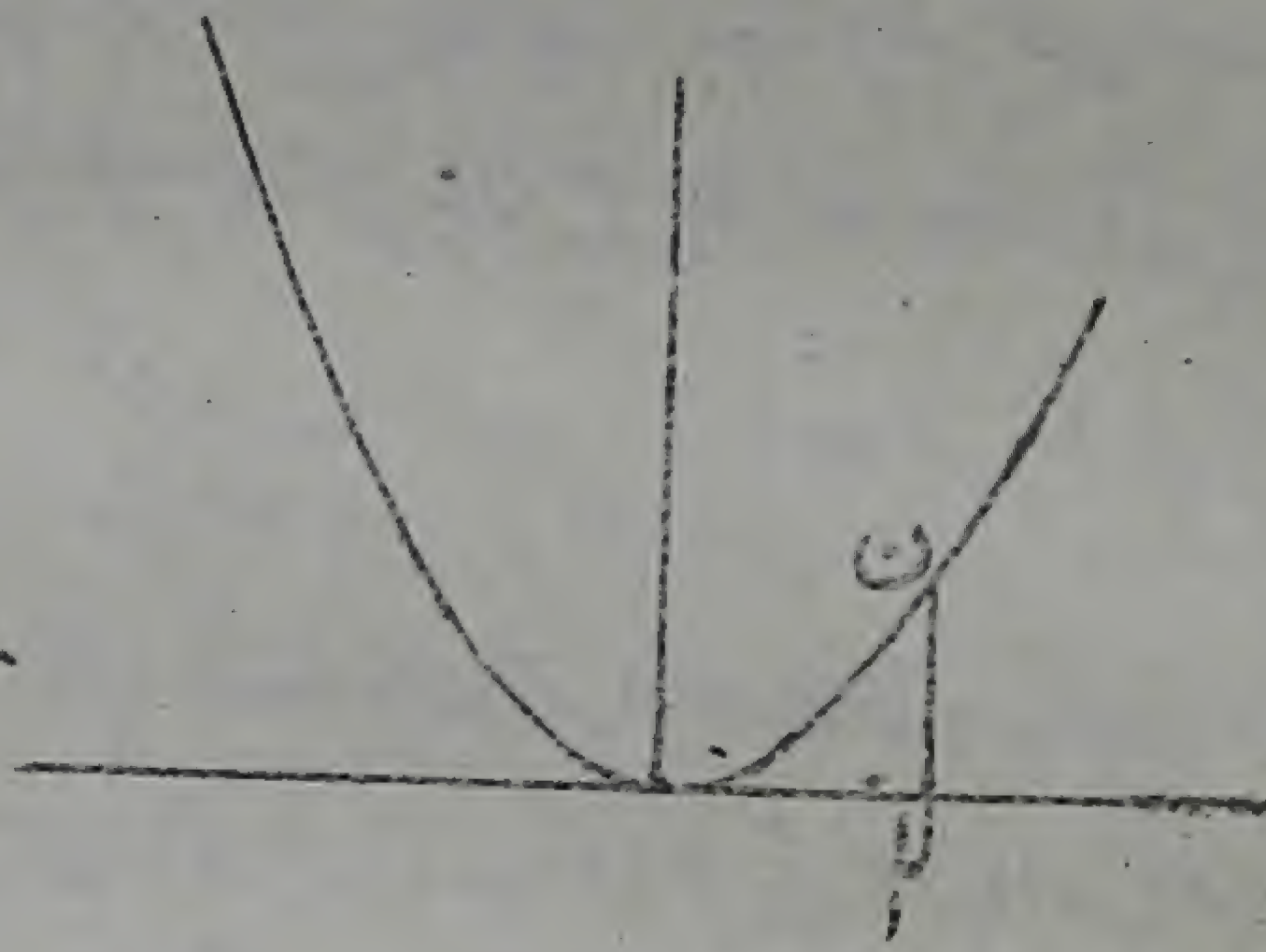
لا کی تمام قیمتوں کے لیے تسلسل کی تعریف کرنے سے پیشتر ضروری ہے کہ لا کی صرف ایک معین قیمت پر تسلسل کی تعریف کی جائے۔ اس لیے ہم لا کی ایک خاص قیمت لا؁ لیتے ہیں جس کے جواب میں منحنی (۱) پر نقطۂ ن حاصل ہوتا ہے۔ اب ہم دریافت کرینگے کہ تفاعل ف (لا) کی وہ کون سی امتیازی خاصیتیں ہیں جو لا کی اس معین قیمت لا؁ کے ساتھ منسوب ہیں۔

پہلے تو ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل ف (لا) کی تعریف نقطۂ لا = لا؁ پر کی گئی ہے یعنی نقطۂ لا؁ پر تفاعل کی قیمت ف (لا؁) معین اور معلوم ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ خاصیت بہت ضروری ہے کیونکہ اگر تفاعل کی قیمت نقطۂ لا؁ پر معلوم نہ ہو تو منحنی میں سے ایک نقطہ غائب ہوگا۔

دوسری اہم خاصیت جو ہمیں نظر آتی ہے وہ یہ ہے کہ نقطۂ لا = لا؁ کے قریب تمام نقطوں کے لیے تفاعل ف (لا) کی قیمت معلوم ہو یعنی ہم ایک چھوٹا وقفہ ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ جس میں لا؁ شامل ہو اور جس پر کے تمام نقطوں کے لیے تفاعل ف (لا) کی قیمت معلوم اور معین ہو۔ شکل میں ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم نقطہ لا = لا (ج) کے دونوں طرف نقاط ا اور ب لیں تو خط کے حصۂ ا ب پر کے تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہے۔

تیسری یہ کہ اگر ہم نقطۂ ا کو نقطۂ ج کے قریب لائیں تو معین ا ن معین ج ن کے قریب آتا جائیگا یعنے تفاعل ف (لا) قیمت ف (لا؁) کے قریب آتا جائیگا۔ اسی طرح اگر سیدھی طرف سے ہم نقطۂ ب کو نقطۂ ج کے قریب لائیں تو معین ب ن معین ج ن کے قریب آتا جائیگا یعنے اب بھی تفاعل

ف (لا) قیمت ف (لاِ) کے قریب آ ئیگا - یعنے اگر لا بائیں یا سیدھی کسی طرف سے مائل بہ لاِ ہو تو تفاعل ف (لا) مائل بہ ف (لاِ) ہو۔

مثلاً ایک خاص مثال کے طور پر ہم تفاعل ما = ف (لا) = لا² پر غور کرتے ہیں جس کا منحنی ہندسۂ تحلیلی کی رُو سے ایک مکافی ملتا ہے۔

اس تفاعل لا² کے تسلسل کی خاصیت معلوم کرنے کے لیے ہم نقطۂ لا = ۱ پر غور کرتے ہیں یعنے لا کی قیمت ۱ لیتے ہیں - ہم دیکھتے ہیں کہ اس میں اوپر کی تینوں خاصیتیں پائی جاتی ہیں۔

(۱) ظاہر ہے کہ نقطۂ ۱ پر تفاعل کی قیمت معین اور معلوم ہے یعنے لا² = ۱

(۲) نقطۂ لا = ۹ء اور لا = ۱ء۱ کے درمیانی تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہے جس کو ہم حساب لگا کر معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً لا = ۹ء پر قیمت ۸۱ء اور لا = ۱ء۱ پر قیمت ۲۱ء۱ ہے - اس خاص تفاعل کے لیے نہ صرف وقفۂ ۹ء سے لے کر ۱ء۱ تک بلکہ - ∞ سے لے کر + ∞ تک تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

(۳) آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ چاہے لا کو ۹ء سے بڑھاتے ہوئے بتدریج ۱ کی طرف مائل کیا جائے یا ۱ء۱ سے گھٹاتے ہوئے بتدریج ۱ کی طرف مائل کیا جائے دونوں صورتوں میں لا² کی انتہا ۱ ہے

یعنے $\lim\limits_{لا \to ۱}$ لا^۲ = ۱

اس تشریح کے بعد ظاہر ہے کہ ہم تسلسل کی حسبِ ذیل تعریف کر سکتے ہیں :-

۱۲ء۲ : مسلسل تفاعل کی تعریف :- تفاعل

ف (لا) کو نقطۂ لا۱ پر مسلسل کہا جاتا ہے بشرطیکہ ف (لا) قیمت ف (لا۱) کی طرف مائل ہو جبکہ لا سیدھی یا بائیں طرف سے مائل بہ لا۱ ہو۔ یعنے بشرطیکہ

$$\lim_{لا \to لا_۱} ف\,(لا) = ف\,(لا_۱).$$

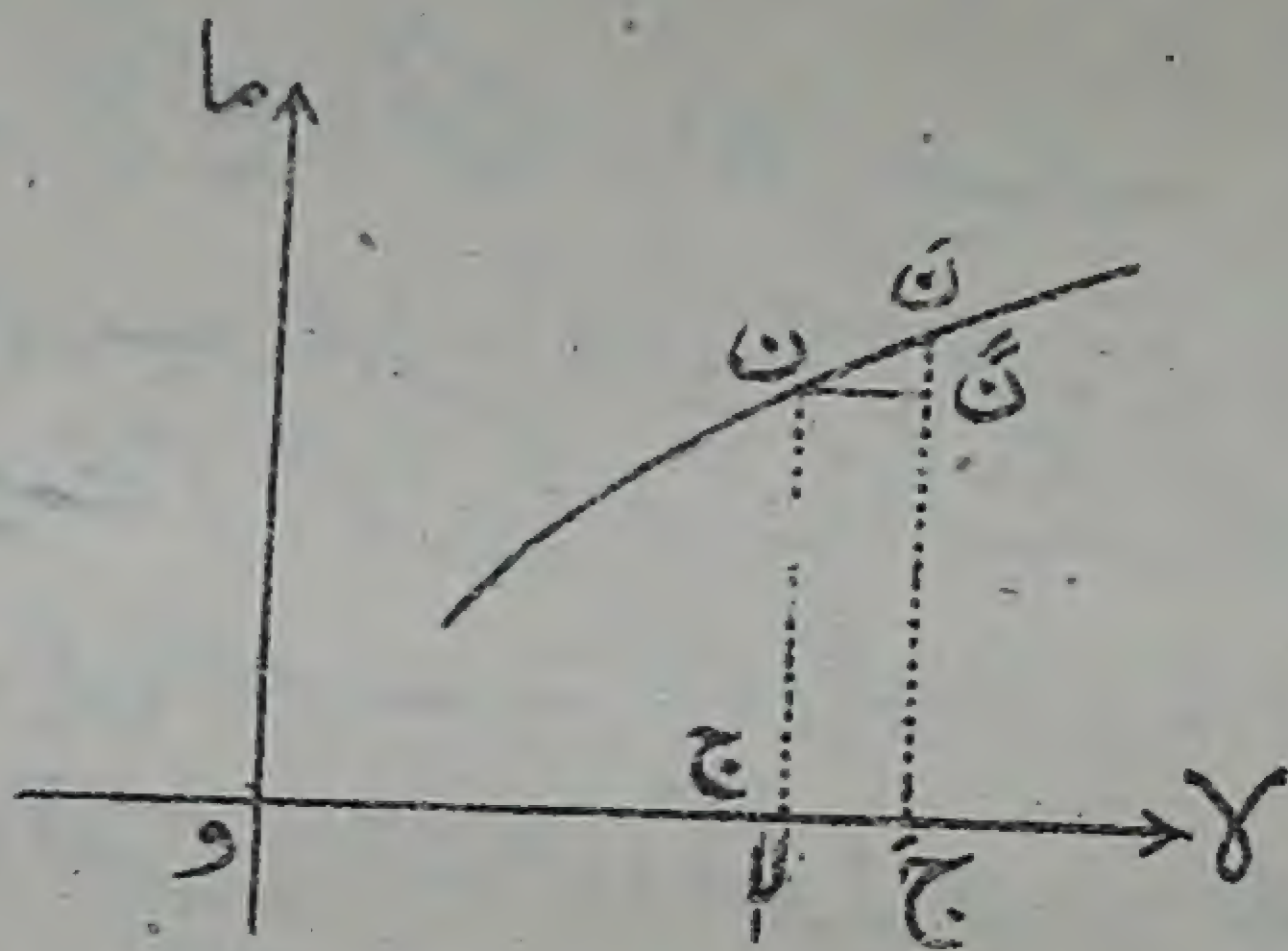
نوٹ :- انتہا کے بیان میں ہم نے طالب علم کی توجہ اس طرف مبذول کرائی تھی کہ عام صورت میں کسی نقطہ پر ایک تفاعل کی انتہا اور اس کی قیمت میں کوئی تعلق نہیں ہوتا۔ لیکن ہم نے وہاں دیکھا تھا کہ اتفاقی طور پر بعض تفاعلوں کی قیمت اور انتہا مساوی ہوتے ہیں۔ یہی خاص تفاعل ہیں جن کو ہم یہاں مسلسل کہتے ہیں۔ تو گویا مسلسل تفاعل کی تعریف یوں کی جارہی ہے کہ یہ وہ تفاعل ہے جس کی انتہا اور قیمت ایک ہی ہے۔

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسلسل تفاعل کا مفہوم انتہا کے مفہوم پر مبنی ہے۔ ایک عام تفاعل اور مسلسل تفاعل میں فرق صرف اس قدر ہے کہ عام تفاعل کے لیے $\lim\limits_{لا \to لا_۱}$ ف (لا) کوئی عدد ل ہوسکتا ہے لیکن ایک مسلسل تفاعل کے لیے خاص طور پر ل کو ف (لا۱) کے مساوی ہونا چاہیے۔ اگر ہم انتہا کی تعریف جو دفعہ ۲ء۵ میں کی گئی ہے اس کو زیر نظر رکھیں اور اس تعریف میں ل کی بجائے ف (لا۱) درج کریں تو ایک مسلسل تفاعل کی تعریف اس طرح بھی کی جاسکتی ہے :-

مسلسل تفاعل کی دوسری تعریف۔ تفاعل ف (لا)

نقطۂ لاٖ پر مسلسل اُس وقت ہوگا جبکہ اگر صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا عدد ہو تو نقطہ لاٖ کے کافی قریب (یعنے ایک فاصلہ ضہ پر) کے کسی نقطہ لا پر تفاعل کی قیمت ف (لا) اور ف (لاٖ) کا فرق عہ سے چھوٹا ہو یعنے مختصر الفاظ میں ف (لا) نقطہ لاٖ پر اُس وقت مسلسل ہوگا جبکہ جوں جوں نقطہ لا نقطہ لاٖ کے قریب آتا جائے اُسی قدر قیمت ف، (لا)، قیمت ف (لاٖ) کے قریب ہوتی جائے۔ یعنے اگر لاٖ میں تھوڑا فرق پیدا کیا جائے تو ف (لاٖ) میں بھی بہت تھوڑا فرق پیدا ہو جائے۔

مسلسل تفاعل کی اس خاصیت کو ہم دوسرے الفاظ میں حسبِ ذیل طریقہ پر ادا کر سکتے ہیں:-

فرض کرو کہ ما = ف (لا) ایک تفاعل ہے لا کا جس کی قیمت نقطۂ لاٖ اور اس کے قریب کے نقطوں پر معلوم اور معین ہے۔

شکل میں نقطۂ ج محور لا پر عدد لاٖ کو تعبیر کرتا ہے یعنے و ج = لاٖ اور اس لیے ج ن تفاعل کی قیمت کو یعنے ماٖ = ف (لاٖ) کو تعبیر کرتا ہے۔

لا کی قیمت میں ہم ایک خفیف اضافہ ھ کرتے ہیں یعنی لا کی قیمت کو لاٖ سے بدل کر (لاٖ + ھ) کر دیتے ہیں جہاں ھ ایک چھوٹا عدد ہے جس کو ہم مثبت یا منفی جس علامت کے ساتھ چاہیں لے سکتے ہیں (شکل میں ہم نے ھ کو مثبت علامت کے ساتھ لیا ہے)

پس و جَ = لاٖ + ھ

اس لیے جَ نَ = ف (لاٖ + ھ) = ماٖ + ک فرض کرو کیونکہ یہ

قیمت ما سے کچھ مختلف ہوگی۔ ن نَ محور لا کے متوازی کھینچو جو جَ نَ کو نقطہ نً پر ملے تو نً نَ = ک ؛

ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم لا میں چھوٹی تبدیلی ھ کر دیں تو تفاعل کی قیمت ما میں اسی کے جواب میں ایک چھوٹی تبدیلی ک = ف (لا + ھ) - ف (لا) پیدا ہو جاتی ہے۔ اگر ہم تفاعل کی قیمت ج ن میں اس سے بھی کم تبدیلی کرنا چاہیں تو نقطہ جَ کو ج کے اور زیادہ قریب لے سکتے ہیں۔ غرض کہ جوں جوں نقطہ جَ نقطہ ج کے قریب آتا ہے اسی قدر قیمت جَ نَ قیمت ج ن کے قریب آتی ہے۔

اسی بناء پر ہم کہتے ہیں کہ تفاعل ف (لا) نقطہ لا پر مسلسل ہے۔

۲،۱۳ - ایک وقفہ میں مسلسل تفاعل :-

متغیر لا کا وقفہ - تعریف :- فرض کرو کہ ا اور ب دو حقیقی عدد ہیں اور ب > ا - اگر ایک مسلسل متغیر لا عددوں ا اور ب کی درمیانی ہر حقیقی قیمت کو بشمول ا اور ب اختیار کر سکے تو ہم کہتے ہیں کہ لا، بند وقفہ (ا، ب) میں معلوم ہے یا بالفاظ دیگر لا کا بند وقفہ (ا، ب) ہے۔

اگر اس وقفہ میں سے خود اعداد ا اور ب خارج ہوں تو اس وقفہ کو لا کا کھلا وقفہ کہتے ہیں۔

اس کتاب میں جب تک کہ صریحاً بیان نہ کیا جائے محض وقفہ سے ہماری مراد ہمیشہ بند وقفہ ہوگی۔

ایک وقفہ میں مسلسل تفاعل - تعریف :- اگر تفاعل ف (لا) وقفہ (ا، ب) میں کے ہر نقطہ پر مسلسل ہو تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل ف (لا) پورے وقفہ (ا، ب) میں مسلسل ہے۔

۲،۲ : مسلسل تفاعل کی مثالیں :-

۲،۲۱۔ مثال ۱ — $\text{ما} = \text{لا}^{2}$

اگر لا کو بدل کر لا + ھ کر دیا جائے تو لا^{2} بدل کر $(\text{لا} + \text{ھ})^{2}$ یعنے $\text{لا}^{2} + 2\,\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ھ}^{2}$ ہو جاتا ہے اور اس لیے ما میں تبدیلی $2\,\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ھ}^{2}$ ہوتی ہے۔

تفاعل لا^{2} کو مسلسل ثابت کرنے کے لیے ضروری ہے کہ تبدیلی $2\,\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ھ}^{2}$ کو چھوٹا ثابت کیا جائے۔ اب اگر صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا مثبت عدد ہو۔

$$2\,\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ھ}^{2} < \text{صہ}$$

بشرطیکہ

$$\text{لا}^{2} + 2\,\text{ھ}\,\text{لا} + \text{ھ}^{2} < \text{لا}^{2} + \text{صہ}$$

یعنے اگر

$$(\text{لا} + \text{ھ})^{2} < \text{لا}^{2} + \text{صہ}$$

یعنے اگر

$$\text{لا} + \text{ھ} < \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{صہ}}$$

یعنے

$$\text{ھ} < \sqrt{\text{لا}^{2} + \text{صہ}} - \text{لا}$$

پس معلوم ہوا کہ اگر لا میں تبدیلی ھ کو $\sqrt{\text{لا}^{2} + \text{صہ}} - \text{لا}$ سے چھوٹا لیا جائے تو ما میں تبدیلی صہ سے چھوٹی ہوتی ہے چاہے لا کی کچھ ہی قیمت ہو۔ جس سے ظاہر ہے کہ $-\infty$ سے لے کر $+\infty$ تک لا کی تمام قیمتوں کے لیے تفاعل لا^{2} مسلسل ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ $\text{ما} = \text{لا}^{\text{ن}}$، جہاں ن کوئی مثبت عدد ہے متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

۲،۲۲۔ مثال ۲ — $\text{ما} = \frac{\text{لا} - 3}{\text{لا}}$

اگر لا کی قیمت کو بدل کر لا + ھ کر دیا جائے تو ما کی قیمت

بدل کر $\frac{(\text{لا}+\text{ھ})-۳}{\text{لا}+\text{ھ}}$ ہو جاتی ہے اور اس لیے ما کی قیمت میں تبدیلی ک ہو تو

$$\text{ک}=\frac{(\text{لا}+\text{ھ})-۳}{\text{لا}+\text{ھ}}-\frac{\text{لا}-۳}{\text{لا}}=\frac{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})-۳\,\text{لا}-(\text{لا}-۳)(\text{لا}+\text{ھ})}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}$$

$$=\frac{۳\text{ھ}}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}$$

یعنے ما کی قیمت میں تبدیلی $\frac{۳\text{ھ}}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}$ ہوتی ہے۔ اب اگر کوئی چھوٹا مثبت عدد صہ دیا ہوا ہو تو ما کی قیمت میں یہ تبدیلی صہ سے کم ہوگی یعنے

$$\frac{۳\text{ھ}}{\text{لا}(\text{لا}+\text{ھ})}<\text{صہ}$$

اگر

$$۳\text{ھ}<\text{صہ}\,\text{لا}^{۲}+\text{صہ}\,\text{لا}\,\text{ھ}$$

یعنے اگر

$$\text{ھ}(۳-\text{لا}\,\text{صہ})<\text{لا}^{۲}\,\text{صہ}$$

یعنے اگر

$$\text{ھ}<\frac{\text{لا}^{۲}\,\text{صہ}}{۳-\text{لا}\,\text{صہ}}$$

اب چاہے صہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو ھ کو ہم اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ وہ $\frac{\text{لا}^{۲}\,\text{صہ}}{۳-\text{لا}\,\text{صہ}}$ سے چھوٹا ہو سوائے اس صورت کے جبکہ لا صفر کے مساوی ہو کیونکہ اس صورت میں ھ ایک مثبت عدد جو صفر سے چھوٹا ہو نہیں مل سکتا۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دیا ہوا تفاعل $\frac{\text{لا}-۳}{\text{لا}}$ متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے لا = ۰ کے مسلسل ہے اور نقطۂ لا = ۰ پہ غیر مسلسل ہے۔ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک تفاعل ف (لا) متغیر لا کی کسی خاص قیمت کے لیے لاتناہی ہو جائے تو اس قیمت کے لیے تفاعل ف (لا) غیر مسلسل ہے۔

اس لیے تفاعل ما = لاⁿ جہاں ن کوئی منفی عدد ہے نقطۂ لا = ۰ پر غیر مسلسل ہے اور اس نقطہ کے علاوہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

۲۴۳ء۲ : مثال ۳:۔ ما = جب لا

اگر لا کی قیمت کو بدل کر لا + ھ کر دیا جائے تو جب لا بدل کر جب (لا + ھ) ہو جاتا ہے اور اس لیے ما میں تبدیلی جب (لا + ھ) ۔ جب (لا) ہو جاتی ہے لیکن ہم کو معلوم ہے کہ اگر ا اور ب کوئی دو زاویے ہوں تو

$$\text{جب ا} - \text{جب ب} = ۲ \text{ جم } \frac{\text{ا} + \text{ب}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{ا} - \text{ب}}{۲}$$

پس

$$\text{ما میں تبدیلی} = ۲ \text{ جم } \frac{\text{لا} + \text{ھ} + \text{لا}}{۲} \text{ جب } \frac{\text{لا} + \text{ھ} - \text{لا}}{۲}$$

$$= ۲ \text{ جم } \left(\text{لا} + \frac{\text{ھ}}{۲}\right) \text{ جب } \frac{\text{ھ}}{۲}$$

اب اگر صہ کوئی چھوٹا مثبت عدد دیا ہوا ہو تو ما میں یہ تبدیلی صہ سے کم ہوگی بشرطیکہ

$$۲ \text{ جم } \left(\text{لا} + \frac{\text{ھ}}{۲}\right) \text{ جب } \frac{\text{ھ}}{۲} < \text{صہ}$$

یعنے اگر

$$\text{جب } \frac{\text{ھ}}{۲} < \frac{\text{صہ}}{۲ \text{ جم } \left(\text{لا} + \frac{\text{ھ}}{۲}\right)}$$

یعنے اگر

$$\text{جب } \frac{\text{ھ}}{۲} < \frac{\text{صہ}}{۲ \text{ جم لا}}$$

یعنے اگر

$$\text{ھ} < ۲ \text{ جب}^{-۱} \left(\frac{\text{صہ}}{۲ \text{ جم لا}}\right)$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا مساوی نہیں ہے $\frac{\pi}{۲}$ کے کسی طاق ضعف کے تو ہم ھ کا اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ $\text{ھ} < ۲ \text{ جب}^{-۱} \left(\frac{\text{صہ}}{۲ \text{ جم لا}}\right)$ اور ھ کی اعلیٰ قیمت

کے لیے ما میں تبدیلی صہ سے کم ہو گی۔

اب اگر لا مساوی ہے $\frac{\pi}{2}$ تو $\frac{\pi}{2}$ کو بدل کر $\frac{\pi}{2}$ + ھ کرنے میں ما کی قیمت میں تبدیلی۔

جب ($\frac{\pi}{2}$ + ھ) - جب $\frac{\pi}{2}$ = جم ھ - ۱

ہو گی اور یہ تبدیلی مطلق قیمت میں صہ سے کم ہو گی بشرطیکہ

۱ - جم ھ < صہ

یعنے اگر

جم ھ > ۱ - صہ

پس ھ کا اس طرح انتخاب کرنا چاہیے کہ جم ھ کم از کم (۱ - صہ) کے برابر ہو۔ ھ کی اس قیمت کے لیے ما میں تبدیلی صہ سے کم ہو گی۔

غرض کہ - ∞ سے لے کر + ∞ تک لا کی تمام قیمتوں کے لیے عدد ھ کا ہم اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ جب لا کی قیمت میں تبدیلی جب (لا + ھ) - جب لا دیے ہوئے اختیاری چھوٹے ثبت عدد صہ سے کم ہو۔ پس تفاعل جب لا متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

۴۲۴۔ مثال ۴:- ما = مس لا

اگر لا کی قیمت کو بدل کر (لا + ھ) کر دیا جائے تو مس لا بدل کر مس (لا + ھ) ہو جاتا ہے اور اس لیے ما میں تبدیلی مس (لا + ھ) - مس لا ہو جاتی ہے۔

پس ما میں تبدیلی = مس (لا + ھ) - مس لا

$$= \frac{\text{مس لا + مس ھ}}{\text{۱ - مس لا مس ھ}} - \text{مس لا}$$

$$= \frac{\text{مس لا + مس ھ - مس لا (۱ - مس لا مس ھ)}}{\text{۱ - مس لا مس ھ}}$$

$$= \frac{\text{مس ھ (۱ + مس}^{2}\text{ لا)}}{\text{۱ - مس لا مس ھ}} = \frac{\text{مس ھ قط}^{2}\text{ لا}}{\text{۱ - مس لا مس ھ}}$$

$$= \frac{\text{مس ھ}}{\text{جم}^2 \text{لا} \left(\text{۱ - مس لا مس ھ} \right)}$$

$$= \frac{\text{مس ھ}}{\text{جم}^2 \text{لا - جب لا جم لا مس ھ}}$$

اب اگر صہ کوئی دیا ہوا اختیاری چھوٹا مثبت عدد ہو تو ما بین یہ تبدیلی صہ سے کم ہو گی بشرطیکہ

$$\frac{\text{مس ھ}}{\text{جم}^2 \text{لا - جب لا جم لا مس ھ}} < \text{صہ}$$

یعنی اگر $\quad$ مس ھ (۱ + صہ جب لا جم لا) < صہ جم^2 لا

یعنی اگر $\quad$ مس ھ $< \dfrac{\text{صہ جم}^2 \text{لا}}{\text{۱ + صہ جب لا جم لا}}$

ھ کو ہم اس قدر چھوٹا مثبت انتخاب کر سکتے ہیں کہ مس ھ $< \dfrac{\text{صہ جم}^2 \text{لا}}{\text{۱ + صہ جب لا جم لا}}$

سوائے اس صورت کے جبکہ لا قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا کوئی طاق ضعف ہو۔ کیونکہ اگر لا = $\frac{\pi}{2}$ تو

جم لا = ۰ اور ھ ایک مثبت عدد ایسا انتخاب نہیں کیا جا سکتا کہ مس ھ < ۰

پس معلوم ہوا کہ تفاعل مس لا متغیر لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے لا کی تمام قیمتوں کے لیے سوائے حسب ذیل قیمتوں کے:

لا = $\pm \frac{\pi}{2}$، $\pm \frac{3\pi}{2}$، $\pm \frac{5\pi}{2}$، $\pm \frac{7\pi}{2}$، ...، $\pm \frac{n\pi}{2}$ (ن طاق عدد)

اگر لا قیمت $\frac{\pi}{2}$ سے صرف ذرا سا کم ہے تو مس لا کی قیمت ایک بہت بڑا مثبت عدد ہے اور اگر لا قیمت $\frac{\pi}{2}$ سے صرف ذرا سا بڑا ہے تو مس لا کی قیمت ایک بہت بڑا منفی عدد ہے جو تفاعل مس لا کی ترسیم سے ظاہر ہے۔ پس لا کی قیمت میں $\frac{\pi}{2}$ کی بائیں طرف سے سیدھی طرف ذرا سا فرق پیدا کرنے پر مس لا کی قیمت میں بہت بڑا فرق پیدا ہو جاتا ہے جو تسلسل کی تعریف کے خلاف ہے۔ اس لیے مس لا نقطۂ $\frac{\pi}{2}$ اور اسی طرح $\pm \frac{n\pi}{2}$ (ن طاق عدد) کے لیے غیر مسلسل ہے۔ باقی تمام نقطوں کے لیے جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا مس لا مسلسل ہے۔

مشقی سوالات ۵

(۱) تعریف کی رُو سے ثابت کرو کہ ذیل کے تفاعل لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہیں:-

(ا) ما = ۳ + ۴ لا، (ب) ما = ۲ + لا − $\text{لا}^{۲}$، (ج) ما = جم لا

(د) ما = $\frac{۱}{۱ + \text{لا}^{۲}}$، (ھ) ما = $\text{جب}^{۲}$ لا،

(۲) ثابت کرو کہ تفاعل ما = مم لا، لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسبِ ذیل قیمتوں کے:

لا = ۰، ± π، ± ۲π، ± ۳π، ...، ± ن π ... (ن مثبت صحیح عدد)

(۳) ثابت کرو کہ تفاعل ما = قط لا، لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسب ذیل قیمتوں کے:

لا = ± $\frac{π}{۲}$، ± $\frac{۳π}{۲}$، ± $\frac{۵π}{۲}$، ...، $\frac{\text{ن} π}{۲}$ (ن طاق عدد)

(۴) ثابت کرو کہ تفاعل ما = قم لا، لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسبِ ذیل قیمتوں کے:

لا = ۰، ± π، ± ۲π، ± ۳π، ...، ± ن π (ن مثبت صحیح عدد)

(۵) بتاؤ کہ ذیل کے تفاعل کن نقطوں پر غیر مسلسل ہیں:-

(ا) ما = $\frac{\text{لا}^{۲}}{۳ - ۲\text{لا}}$، (ب) ما = $\frac{\text{لا}}{(۱ + \text{لا})^{۲}}$، (ج) ما = قم ۲ لا

(د) ما = $\frac{۱}{\text{لا}^{۴} - ۱۳\text{لا}^{۲} + ۳۶}$، (ھ) ما = $\frac{۱ + \text{جب}^{۲}\text{لا}}{\text{جم لا}}$ (و) ما = $\frac{۲ + \text{جب لا}}{۱ + \text{جم لا}}$

(۶) تفاعل ما = $\frac{\text{لا}^{۳} + ۲۷}{\text{لا} + ۳}$ کو نقطۂ لا = −۳ پر کونسی قیمت دینی چاہیے کہ یہ تفاعل لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہو جائے۔

(۷) ثابت کرو کہ تفاعل ما = $\frac{\text{لا} - \text{ا}}{(\text{مالا} - \text{ما ا})^{۲}}$ نقطۂ لا = ا پر

غیر مسلسل ہے -

(۸) ثابت کرو کہ تفاعل لا^{۲} + ۲ لا - ۳ نقطۂ لا = ۲ پر مسلسل ہے -

(۹) ثابت کرو کہ تفاعل $\frac{۱}{\text{لا} - ۱}$ نقطۂ لا = ۱ پر غیر مسلسل ہے -

(۱۰) ثابت کرو کہ تفاعل لا^{۲} + ۴ لا - ۲ نقطۂ لا = ۱ پر مسلسل ہے -

(۱۱) ثابت کرو کہ تفاعل $\frac{\text{لا}^{۲} + ۱}{\text{لا}^{۲} - ۱}$ نقطۂ لا = ۲ پر مسلسل ہے لیکن نقطۂ لا = ۱ پر غیر مسلسل ہے -

(۱۲) ثابت کرو کہ تفاعل $\frac{۱}{۲\text{لا} - ۳}$ نقطۂ لا = $\frac{۳}{۲}$ پر غیر مسلسل ہے -

(۱۳) ثابت کرو کہ تفاعل $\frac{\text{لا}^{۲} - ۴}{\text{لا} - ۲}$ نقطۂ لا = ۲ کے سوا باقی تمام نقطوں پر مسلسل ہے -

۳ء۲ - مسلسل تفاعلوں کے متعلق مسائل -

۱۳ء۲ - مسئلہ ۱ - اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوں، تو تفاعل ف (لا) + فہ (لا) بھی نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوگا -

چونکہ تفاعل ف (لا) نقطہ لا = ا پر مسلسل ہے اس لیے تعریف کی رُو سے

$$\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \ \text{ف (لا)} = \text{ف (ا)} \quad \ldots\ldots (۱)$$

اسی طرح چونکہ تفاعل فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہے اس لیے

$$\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \ \text{فہ (لا)} = \text{فہ (ا)} \quad \ldots\ldots (۲)$$

اب ہمیں دفعہ ۵ء۴۱ کے مسئلہ (۱) کی رُو سے معلوم ہے کہ دو تفاعلوں کے حاصل جمع کی انتہا انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے پس (۱) اور (۲) سے

$$\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \left\{ \text{ف (لا)} + \text{فہ (لا)} \right\} = \left\{ \text{ف (ا)} + \text{فہ (ا)} \right\} \quad \ldots (۳)$$

لیکن {ف (ا) + فہ (ا)} قیمت ہے تفاعل {ف (لا) + فہ (لا)} کی نقطۂ لا = ا پر یعنے اس تفاعل کی قیمت اور انتہا دونوں ایک ہی ہیں پس تعریف کی رُو سے تفاعل {ف (لا) + فہ (لا)} نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہے۔

۲ء۳۲ - مسئلہ ۲ - اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوں تو تفاعل ف (لا) - فہ (لا) بھی نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوگا۔

دفعہ گزشتہ کی طرح تعریف کی بنا پر ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\underset{\text{لا} \leftarrow \text{ا}}{\text{نہا}} \text{ ف (لا)} = \text{ف (ا)}، \quad \underset{\text{لا} \leftarrow \text{ا}}{\text{نہا}} \text{ فہ (لا)} = \text{فہ (ا)}$$

لیکن دفعہ ۱ء۵۴ کے مسئلہ (۲) کی رُو سے

$$\underset{\text{لا} \leftarrow \text{ا}}{\text{نہا}} \{\text{ف (لا) - فہ (لا)}\} = \{\text{ف (ا) - فہ (ا)}\}$$

یعنے تفاعل ف (لا) - فہ (لا) کی انتہا اور قیمت ایک ہی ہیں پس تفاعل ف (لا) - فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہے۔

۲ء۳۳ - مسئلہ ۳ : اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوں تو تفاعل ف (لا) فہ (لا) بھی نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوگا۔

ہمیں دیا ہوا ہے کہ

$$\underset{\text{لا} \leftarrow \text{ا}}{\text{نہا}} \text{ ف (لا)} = \text{ف (ا)}، \quad \underset{\text{لا} \leftarrow \text{ا}}{\text{نہا}} \text{ فہ (لا)} = \text{فہ (ا)}$$

لیکن دفعہ ۱ء۵۴ کے مسئلہ (۳) کی رُو سے دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کی انتہا، انتہاؤں کے حاصلِ ضرب کے مساوی ہوتی ہے، پس

$$\underset{\text{لا} \leftarrow \text{ا}}{\text{نہا}} \{\text{ف (لا)} \times \text{فہ (لا)}\} = \text{ف (ا)} \times \text{فہ (ا)}$$

یعنے تفاعل ف (لا) × فہ (لا) کی قیمت اور انتہا دونوں ایک ہی ہیں پس

تفاعل ف (لا) × فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہے۔

۲،۳۴۔ مسئلہ ۴۔ اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا) نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہوں اور فہ (ا) ≠ ۰ تو نقطۂ لا = ا پر تفاعل $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{فہ (لا)}}$ بھی مسلسل ہوگا۔

تعریف کی رُو سے ہم کو معلوم ہے کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \text{ف (لا)} = \text{ف (ا)}، \quad \text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \text{فہ (لا)} = \text{فہ (ا)}$$

لیکن دفعہ ۱،۵۴ کے مسئلہ (۴) کی رُو سے دو تفاعلوں کے خارج قسمت کی انتہا انتہاؤں کے خارج قسمت کے مساوی ہوتی ہے۔ بشرطیکہ نسب نما کی انتہا صفر نہ ہو پس

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \frac{\text{ف (لا)}}{\text{فہ (لا)}} = \frac{\text{ف (ا)}}{\text{فہ (ا)}} \quad \text{چونکہ فہ (ا)} \neq 0$$

یعنے تفاعل $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{فہ (لا)}}$ کی قیمت اور انتہا دونوں ایک ہی ہیں اس لیے یہ تفاعل نقطۂ لا = ا پر مسلسل ہے۔

مثالیں

ثابت کرو کہ ذیل کے تفاعل مسلسل ہیں:—

(۱) $\text{ما} = \text{لا}^2$

(۲) $\text{ما} = \text{لا}^4$

(۳) $\text{ما} = \text{ا}_\circ \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ا}_1 \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}_2 \text{لا}^{\text{ن}-2} + \dots + \text{ا}_{\text{ن}-1} \text{لا} + \text{ا}_{\text{ن}}$

(ن مثبت صحیح عدد اور $\text{ا}_\circ$، ا_1 ... $\text{ا}_{\text{ن}}$ مستقل ہیں)

(۴) $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2 + 1}$

(۵) ما = جب^{۳} لا

(۶) ما = $\frac{\text{جب لا}}{\text{۴ + جم لا}}$

(۷) ما = جب^{م} لا جم^{ن} لا (م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں)

۲ء۴ - چند اہم انتہائیں

۲ء۴۱ - نہا$_{ن \to \infty}$ لا^{ن}

اس میں لا ایک معین عدد ہے جو $-\infty$ سے $+\infty$ تک کچھ ہی ہو سکتا ہے - لا کی اِن قیمتوں کو ہم مختلف حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں اور ہم دیکھیں گے کہ لا کی مختلف قیمتوں کے لیے یہ انتہا مختلف حاصل ہوتی ہے -

(أ) لا > ۱ فرض کرو کہ لا ایک مثبت عدد ہے جو ۱ سے بڑا ہے تو ہم لکھ سکتے ہیں لا = ۱ + ی جہاں ی کوئی مثبت عدد ہے جو صفر سے بڑا ہے -

پس لا^{ن} = (۱+ی)^{ن} = ۱ + ن ی + $\frac{\text{ن (ن-۱)}}{\text{۲!}}$ ی^{۲} + ... + ی^{ن}

اس لیے

لا^{ن} > ۱ + ن ی (ن کی تمام قیمتوں کے لیے جو ۱ سے بڑی ہوں)

اب چونکہ ی ایک ثابت عدد ہے اور ن بڑا ہوتا جاتا ہے - اس لیے ہم ن کو کافی بڑا لے کر ن ی کو جتنا چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں - پس

نہا$_{ن \to \infty}$ ن ی = ∞

$\therefore$ نہا$_{ن \to \infty}$ لا^{ن} = ∞

(ب) لا = ۱

لا^{ن} = ۱ (ن کی تمام قیمتوں کے لیے) اور اس لیے

نہا$_{ن \to \infty}$ لا^{ن} = ۱

(ج) $۰ < لا < ۱$: یعنی اگر لا ایک مثبت کسر واجب ہے۔

رکھو $لا = \frac{۱}{ما}$ تو جبکہ لا صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا تو

ما ۱ اور $+\infty$ کے درمیان واقع ہوگا۔ پس چونکہ

$لا^{ن} = \frac{۱}{ما^{ن}}$ اور ما ۱ سے بڑا مثبت عدد ہے اس لیے ن کو

کافی بڑا لینے پر $ما^{ن}$ کو جس قدر چاہیں بڑا اور اس لیے $\frac{۱}{ما^{ن}}$ کو جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں۔

$$پس \quad نہا_{ن \to \infty} \; لا^{ن} = ۰$$

(د) $لا = ۰$ تو $لا^{ن} = ۰^{ن} = ۰$، ن کی تمام قیمتوں کے لیے اور اس لیے تو

$$نہا_{ن \to \infty} \; لا^{ن} = ۰$$

(ھ) $-۱ < لا < ۰$ یعنے لا ایک منفی کسر واجب ہے۔

رکھو $لا = -ما$ تو $۰ < ما < ۱$ یعنے ما ایک مثبت کسر واجب ہو جاتی ہے۔

$$پس \quad لا^{ن} = (-۱)^{ن} \, ما^{ن}$$

لیکن صورت (ج) کی رُو سے چونکہ ما ایک مثبت کسر واجب ہے اس لیے

$$نہا_{ن \to \infty} \; ما^{ن} = ۰$$

$$اس \quad نہا_{ن \to \infty} \; لا^{ن} = نہا_{ن \to \infty} (-۱)^{ن} \cdot نہا_{ن \to \infty} \; ما^{ن} = ۰$$

(و) $لا = -۱$

پس $لا^{ن} = (-۱)^{ن}$ یعنے تواتر کی رقمیں یکے بعد دیگرے $+۱$ اور -۱ کے مساوی ہیں اس لیے تواتر کسی انتہا کی طرف مائل نہیں ہوتا بلکہ اہتزاز کرتا ہے اور نیز چونکہ تواتر کے کسی رکن کی قیمت

مطلق +۱ سے بڑی نہیں ہوتی اس لیے کہا جاتا ہے کہ یہ تواتر محدود اہتزاز کرتا ہے۔

(ز) $\text{لا} < -۱$ ، یعنے لا کی قیمت -۱ سے کم ہے۔

اگر ہم $\text{لا} = -\text{ما}$ رکھیں تو ظاہر ہے کہ $\text{ما} > ۱$

پس $\text{لا}^{\text{ن}} = (-۱)^{\text{ن}}\ \text{ما}^{\text{ن}}$

اب صورت (ا) کے بموجب چونکہ $\text{ما} > ۱$، اس لیے

$$\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty}\ \text{ما}^{\text{ن}} = +\infty$$

اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ تواتر $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے طاق ارکان $-\infty$ کے اور جفت ارکان $+\infty$ کی طرف مائل ہوتے ہیں اس لیے تواتر $\text{لا}^{\text{ن}}$ کی انتہا نہ تو کوئی محدود عدد ہے اور نہ $+\infty$ نہ $-\infty$ ۔ اس کے علاوہ مطلق قیمت میں تواتر کی رقمیں بڑھتی چلی جاتی ہیں اس لیے کہا جاتا ہے کہ اگر $\text{لا} < -۱$ تو تواتر $\text{لا}^{\text{ن}}$ غیر محدود اہتزاز کرتا ہے۔

۲۴۷۔ $\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \dfrac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{ن}\ \text{ا}^{\text{ن}-۱}$ جہاں ن کوئی منطق عدد ہے۔ اس کے ثبوت کو ہم ن کی قیمت کے لحاظ سے ۳ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں بموجب اس کے کہ ن مثبت صحیح عدد ہے یا مثبت کسر ہے یا کوئی منفی عدد ہے۔

(ا) فرض کرو کہ ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ تب ہم تصدیق کر سکتے ہیں کہ

$$(\text{لا} - \text{ا})(\text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{ا} + \text{لا}^{\text{ن}-۳}\,\text{ا}^{۲} + \ldots + \text{لا}\,\text{ا}^{\text{ن}-۲} + \text{ا}^{\text{ن}-۱}) = \text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}$$

یعنے $\dfrac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{لا}^{\text{ن}-۱} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{ا} + \ldots\ldots + \text{لا}\,\text{ا}^{\text{ن}-۲} + \text{ا}^{\text{ن}-۱} \ldots\ldots (۱)$

چاہے لا اور ا کوئی حقیقی عدد ہوں اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہو جملہ (۱) ہمیشہ صحیح ہے بشرطیکہ $\text{لا} \neq \text{ا}$ ۔ لیکن چونکہ انتہا لینے میں بھی ہم لا کو کبھی ا کے بالکل برابر نہیں کرتے اگرچہ جس قدر چاہیں قریب لاتے ہیں اس لیے

$$\underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}} \left\{ \text{لا}^{\text{ن}-1} + \text{لا}^{\text{ن}-2}\,\text{ا} + \dots\ \text{لا}\,\text{ا}^{\text{ن}-2} + \text{ا}^{\text{ن}-1} \right\}$$

$$= \text{ا}^{\text{ن}-1} + \text{ا}^{\text{ن}-1} + \dots + \text{ا}^{\text{ن}-1} \quad (\text{ن ارقام})$$

$$= \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1}$$

(۲) فرض کرو کہ ن مثبت کسر $\frac{\text{ف}}{\text{ق}}$ ہے جہاں ف اور ق مثبت صحیح عدد ہیں۔ ہم چاہتے ہیں کہ $\underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} - \text{ا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{لا} - \text{ا}}$ معلوم کریں۔ اس کے لیے ہم رکھتے ہیں

$$\text{لا} = \text{ما}^{\text{ق}} \quad \text{اور} \quad \text{ا} = \text{ب}^{\text{ق}}$$

$$\therefore\ \text{لا}^{\frac{1}{\text{ق}}} = \text{ما} \ \text{اور}\ \text{ا}^{\frac{1}{\text{ق}}} = \text{ب}،\ \text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} = \text{ما}^{\text{ف}}،\ \text{ا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} = \text{ب}^{\text{ف}}$$

$$\text{نیز}\quad \underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}}\ \text{لا}^{\frac{1}{\text{ق}}} = \text{ا}^{\frac{1}{\text{ق}}} = \text{ب}$$

یعنے جبکہ لا ← ا تو ما ← ب

پس چونکہ

$$\frac{\text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} - \text{ا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{ما}^{\text{ف}} - \text{ب}^{\text{ف}}}{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}$$

یعنے

$$\frac{\text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} - \text{ا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{ما}^{\text{ف}} - \text{ب}^{\text{ف}}}{\text{ما} - \text{ب}} \div \frac{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}{\text{ما} - \text{ب}}$$

پس

$$\underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}} - \text{ا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \left\{ \underset{\text{ما}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{ما}^{\text{ف}} - \text{ب}^{\text{ف}}}{\text{ما} - \text{ب}} \right\} \div \left\{ \underset{\text{ما}\to\text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{ما}^{\text{ق}} - \text{ب}^{\text{ق}}}{\text{ما} - \text{ب}} \right\}$$

$$= (\text{ف}\,\text{ب}^{\text{ف}-1}) \div (\text{ق}\,\text{ب}^{\text{ق}-1})$$ [کیونکہ ف اور ق صحیح عدد ہیں]

$$= \frac{\text{ف}}{\text{ق}}\,\text{ب}^{\text{ف}-\text{ق}} = \frac{\text{ف}}{\text{ق}}\,\text{ب}^{\text{ق}\left(\frac{\text{ف}}{\text{ق}} - 1\right)}$$

$$= \frac{\text{ف}}{\text{ق}} (\text{ب}^{\text{ق}})^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}} - 1}$$

$$= \frac{\text{ف}}{\text{ق}} \text{ا}^{\frac{\text{ف}}{\text{ق}} - 1} \qquad [\text{کیونکہ } \text{ب}^{\text{ق}} = \text{ا}]$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ن مثبت کسر ہو تب بھی

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{ن } \text{ا}^{\text{ن} - 1}$$

(۳) بالآخر اگر ن ایک منفی عدد ہے جو چاہے صحیح ہو یا کسر تو ہم لکھتے ہیں $\text{ن} = -\text{م}$ جہاں م ایک مثبت صحیح یا کسری عدد ہوگا۔

اب
$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\text{لا}^{-\text{م}} - \text{ا}^{-\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \frac{\frac{1}{\text{لا}^{\text{م}}} - \frac{1}{\text{ا}^{\text{م}}}}{\text{لا} - \text{ا}}$$

$$= - \frac{\text{لا}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}}{\text{لا}^{\text{م}} \text{ا}^{\text{م}} (\text{لا} - \text{ا})}$$

پس
$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ا}} = \text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \left(- \frac{1}{\text{لا}^{\text{م}} \text{ا}^{\text{م}}}\right) \left(\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \frac{\text{لا}^{\text{م}} - \text{ا}^{\text{م}}}{\text{لا} - \text{ا}}\right)$$

$$= - \frac{1}{\text{ا}^{2\text{م}}} \cdot \text{م } \text{ا}^{\text{م} - 1} \qquad [\text{کیونکہ م مثبت عدد ہے}]$$

$$= -\text{م} \cdot \text{ا}^{-\text{م} - 1}$$

$$= \text{ن } \text{ا}^{\text{ن} - 1} \qquad [\text{کیونکہ } -\text{م} = \text{ن}]$$

پس ن کی تمام مثبت یا منفی صحیح اور کسری قیمتوں کے لیے مسئلہ صحیح ہے۔

نتیجۂ صریح۔ مذکورۂ بالا مسئلہ میں لا اور ا کوئی دو حقیقی عدد ہیں صرف شرط یہ ہے کہ لا مائل بہ ا ہوتا ہے۔ اس میں ہم لا کی بجائے (لا + ھ) اور ا کی بجائے لا رکھتے ہیں اور اس لیے لا مائل بہ ا کی بجائے (لا + ھ) مائل بہ لا ہوتا ہے۔ ایسا ظاہر ہے کہ جس وقت (لا + ھ) مائل بہ لا ہو تو ھ کی قیمت چھوٹی

ہو جاتی ہے یعنے ھ مائل بہ صفر ہوتا ہے پس اوپر کا مسئلہ حسب ذیل ہو جاتا ہے:۔

$$\underset{\text{ھ}\to 0}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}+\text{ھ}-\text{لا}} = \text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

یعنے

$$\underset{\text{ھ}\to 0}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ھ}} = \text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-1}$$

اس میں لا کوئی حقیقی عدد ہے اور ن کوئی مثبت یا منفی صحیح یا کسری عدد ہے۔ یہ نتیجہ بہت اہم ہے اور طالب علم کو چاہیے کہ اسے اچھی طرح سمجھے اور ذہن نشین کرلے۔

۴۴ء۲۔ $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = 0$ ۔ جہاں لا کوئی ثابت حقیقی عدد ہے۔

اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں:

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = \frac{\text{لا}}{1}\times\frac{\text{لا}}{2}\times\frac{\text{لا}}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{\text{لا}}{\text{ن}} \quad\cdots\cdots\cdots (1)$$

اب لا چاہے کتنا ہی بڑا عدد ہو پھر بھی وہ محدود ہے اور ن چونکہ غیر محدود بڑھتا چلا جاتا ہے اس لیے ہم ایک نَ ایسا معلوم کرسکتے ہیں کہ $\text{نَ} > 2\ \text{لا}$ یعنے $\frac{\text{لا}}{\text{نَ}} < \frac{1}{2}$
اب فرض کرو کہ $\text{ن} = \text{نَ} + \text{م} - 1$، تب

$$\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} = \left\{\frac{\text{لا}}{1}\times\frac{\text{لا}}{2}\times\cdots\times\frac{\text{لا}}{\text{نَ}-1}\right\}\times\left\{\frac{\text{لا}}{\text{نَ}}\times\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+1}\times\cdots\times\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+\text{م}-1}\right\} \cdots (2)$$

اس میں نَ ایک محدود عدد ہے اس لیے $\left(\frac{\text{لا}}{1}\times\frac{\text{لا}}{2}\times\cdots\times\frac{\text{لا}}{\text{نَ}-1}\right)$ بھی ایک محدود ہے جو فرض کرو کہ ا کے مساوی ہے۔ نیز چونکہ

$\frac{\text{لا}}{\text{نَ}} < \frac{1}{2}$ اس لیے بدرجۂ اولیٰ $\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+1}$، $\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+1}$، $\cdots$، $\frac{\text{لا}}{\text{نَ}+\text{م}-1}$
سب کے سب کم ہونگے $\frac{1}{2}$ سے۔ نیز چونکہ (۲) میں بائیں قوسین میں م اجزا ہیں پس

$$\frac{لا^{ن}}{\underline{ن}} < ا ۔ \frac{۱}{م} \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اب جس وقت ن بڑھتا چلا جائیگا تو ظاہر ہے کہ م بھی بڑھتا چلا جائیگا اور ہم کو معلوم ہے کہ م کو کافی بڑا لینے سے $\frac{۱}{م}$ کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں اس لیے ن کو کافی بڑا لینے سے $\frac{لا^{ن}}{\underline{ن}}$ کو بھی ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں پس

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \frac{لا^{ن}}{\underline{ن}} = ۰$$

$$۲ء۴۴۔ \quad \text{نہا}_{ن \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن}$$

ن چونکہ ایک مثبت صحیح عدد ہے اس لیے مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلانے پر حاصل ہوتا ہے:

$$\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = ۱ + ن \cdot \frac{۱}{ن} + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱} \times \frac{۱}{ن^{۲}} + \frac{ن(ن-۱)(ن-۲)}{۳\times۲\times۱} \times \frac{۱}{ن^{۳}} + \ldots (ن + ۱ \text{ رقمیں})$$

$$= ۱ + ۱ + \frac{۱}{\underline{۲}}\left(۱ - \frac{۱}{ن}\right) + \frac{۱}{\underline{۳}}\left(۱ - \frac{۱}{ن}\right)\left(۱ - \frac{۲}{ن}\right) + \ldots (ن + ۱ \text{ رقمیں}) \quad (۱)$$

اب جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے اس سلسلہ کی رقمیں بڑی ہوتی جاتی ہیں کیونکہ $\left(۱ - \frac{۱}{ن}\right)$ وغیرہ بڑی ہوتی جاتی ہیں۔ اس کے علاوہ رقموں کی تعداد بھی بڑھتی جاتی ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ن کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ تواتر $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن}$ بھی بڑھتا جاتا ہے یعنے یہ ایک صعودی تواتر ہے۔ اس کے علاوہ ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ اس کی قیمت ۲ سے بڑی ہے جبکہ ن کافی بڑا لیا جائے۔ نیز اگر $\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن}$ کے سلسلہ (۱) کا ذیل کے سلسلہ (۲) سے رقم بہ رقم مقابلہ کیا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ تواتر ن کی ہر قیمت کے لیے (۲) کے بائیں سلسلہ سے کم ہے یعنے

$$\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} < ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲\times۱} + \frac{۱}{۳\times۲\times۱} + \ldots + \frac{۱}{\underline{ن}} \ldots\ldots (۲)$$

لیکن پہلی ۳ رقموں کے بعد خود (۲) کے بائیں سلسلہ کی ہر رقم ذیل کے سلسلہ (۳) سے کم ہے ۔

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times 2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{ن-1}} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

پس

$$\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} < 1+\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{ن-1}}\right\}$$

$$< 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{ن}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$< 3-\frac{1}{2^{ن-1}} \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

یعنے بدرجۂ اولیٰ ن کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} < 3 \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن}$ جو ایک صعودی تواتر ہے ہمیشہ ۳ سے کم رہتا ہے اور اس لیے ہم یہ نتیجہ اخذ کرسکتے ہیں کہ $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن}$ کی انتہا موجود ہے جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے ۔ اس انتہا کا کسی قدر تصور حاصل کرنے کے لیے ن کی چند بڑھتی ہوئی قیمتوں کے لیے ہم تواتر کی قیمت دریافت کرینگے ۔

اگر ن = ۱۰ تو $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} = (1.1)^{10} = 2.5937$

اگر ن = ۱۰۰ تو $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} = (1.01)^{100} = 2.7048$

اگر ن = ۱۰۰۰ تو $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} = (1.001)^{1000} = 2.7169$

اگر ن = ۱۰۰۰۰ تو $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} = (1.0001)^{10000} = 2.7181$

اگر ن = ۱۰۰۰۰۰ تو $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} = (1.00001)^{100000} = 2.7183$، وغیرہ

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ن غیر محدود بڑھتا چلا جائے تو $\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن}$ ایک انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے جس کی قیمت ۲٫۷۱۸ سے کسی قدر زیادہ ہے ۔

یہ انتہا ایک معین لیکن ماورائی عدد یعنے عدد π کی قسم کا ایک عدد ہے جس کی قیمت اگر ہم اعشاریہ میں معلوم کرنا چاہیں تو یہ عمل کبھی ختم نہیں ہوتا اس کی قیمت ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵... ہے اور اس کو اعشاریہ کے تقریباً چھ سو درجوں تک معلوم کیا گیا ہے ۔ اعلیٰ ریاضی میں یہ عدد اہم ترین عددوں میں سے ہے اور اس کو بالعموم حرف (و) سے تعبیر کرتے ہیں جو لفظ قوت سے اخذ کیا گیا ہے ۔ پس

$$\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = و \quad \ldots\ldots\ldots (۶)$$

جہاں و کی قیمت اعشاریہ کے ۷ درجوں تک حسب ذیل ہے :

$$و = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸ \quad \ldots\ldots\ldots (۷)$$

عدد و کی تقریبی قیمت تو ہم نے اس طرح معلوم کی لیکن اس کے لیے ایک لامتناہی سلسلہ بھی جملہ (۱) کی مدد سے دریافت کیا جا سکتا ہے ۔ ہم نے دیکھا ہے کہ کسی مثبت صحیح عدد ن کے لیے

$$\left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!}\left(۱ - \frac{۱}{ن}\right) + \frac{۱}{۳!}\left(۱ - \frac{۱}{ن}\right)\left(۱ - \frac{۲}{ن}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{۱}{ر!}\left(۱ - \frac{۱}{ن}\right)\left(۱ - \frac{۲}{ن}\right)\ldots\ldots\left(۱ - \frac{ر-۱}{ن}\right) + \ldots\ldots (\text{ن+۱ رقمیں})$$

اب جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے اس میں کا ہر ایک جزو ضربی

$۱ - \frac{۱}{ن}$، $۱ - \frac{۲}{ن}$، ... مائل بہ ۱ ہوتا ہے کیونکہ $\frac{۱}{ن}$، $\frac{۲}{ن}$، ...، $\frac{ر}{ن}$، وغیرہ، کی انتہا صفر ہوتی ہے ۔ لیکن اسی کے ساتھ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں کہ ن ویں رقم میں ایسے اجزائے ضربی کی تعداد بھی ن کے ساتھ بڑھتی جاتی ہے ۔ اس لیے محض اس بناء پر کہ اس میں سے ہر ایک جزو ضربی کی انتہا ۱ ہے ہم بغیر مزید ثبوت کے یہ نہیں کہہ سکتے کہ ان لامتناہی اجزاء کے حاصل ضرب کی انتہا بھی ۱ یا کوئی محدود عدد ہوگی ۔ اس خاص صورت میں اس کا باضابطہ ثبوت دیا جا سکتا ہے کہ

$$\underset{ن \to \infty}{\text{نہا}} \left(۱ + \frac{۱}{ن}\right)^{ن} = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۲!} + \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + \ldots + \frac{۱}{ر!} + \ldots \infty \text{ ارقام} \ldots (۸)$$

یہ ثبوت چونکہ کسی قدر دقت طلب ہے اس لیے ہم اس کو یہاں بیان نہیں کرینگے ۔ طالب علم کو اس منزل پر بطور مفروض کے یہ مان لینا چاہیے کہ $(1+\frac{1}{\text{ن}})^{\text{ن}}$ کی انتہا کے لیے ہم کو (۸) کے بائیں طرف کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جو مستدق ہے اور جس کی قیمت وہی عدد و ہے جو جملہ (۷) میں دیا گیا ہے ۔ پس

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+1+\frac{1}{\lfloor\underline{2}}+\frac{1}{\lfloor\underline{3}}+\cdots+\frac{1}{\lfloor\underline{\text{ر}}}+\cdots\infty \text{ ارقام}$$

$$= \text{و}$$

$$= 2.7182818\ldots \qquad (9)$$

۲٫۴۵ - $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ - قوت نمائی تفاعل

اس سلسلہ میں بھی ن ایک مثبت صحیح عدد ہے اور لا کوئی حقیقی ثابت عدد ہے اس لیے مسئلہ ثنائی کی مدد سے پھیلانے پر ملتا ہے :

$$\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+\text{ن}\times\frac{\text{لا}}{\text{ن}}+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor\underline{2}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^2+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)}{\lfloor\underline{3}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^3+\cdots$$

$$+\frac{\text{ن}(\text{ن}-1)\ldots(\text{ن}-\text{ر}+1)}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ر}}+\ldots(\text{ن}+\text{ر})\text{ ارقام}$$

$$= 1+\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{\lfloor\underline{2}}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)+\frac{\text{لا}^3}{\lfloor\underline{3}}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)+\cdots$$

$$+\frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\lfloor\underline{\text{ر}}}\left(1-\frac{1}{\text{ن}}\right)\left(1-\frac{2}{\text{ن}}\right)\ldots\left(1-\frac{\text{ر}-1}{\text{ن}}\right)+\ldots(\text{ن}+1)\text{ رقمیں}\ldots(1)$$

اوپر کی طرح بغیر باضابطہ ثبوت دینے کے ہم یہ مان لیتے ہیں کہ ن کی بڑی قیمتوں کے لیے بائیں طرف کے جملہ کی انتہا ذیل کا لا متناہی سلسلہ ہے :

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = 1+\text{لا}+\frac{\text{لا}^2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{\text{لا}^3}{\lfloor\underline{3}}+\cdots+\frac{\text{لا}^{\text{ر}}}{\lfloor\underline{\text{ر}}}+\ldots\infty\text{ ارقام}\ldots(2)$$

یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ سلسلہ (۲) لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔

لیکن یہ دونوں ثبوت کہ جملۂ $\left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا (۲) کا سلسلہ ہے اور یہ کہ یہ سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے ہم کسی آئندہ موقع پر بیان کرینگے ۔ فی الحال طالب علم کو چاہیے کہ ان سلسلوں کو اچھی طرح یاد رکھے اور یہ ذہن نشین کر لے کہ اگرچہ $۱ - \frac{۱}{\text{ن}}$ ، $۱ - \frac{۲}{\text{ن}}$ ، ... $۱ - \frac{\text{ر}}{\text{ن}}$ میں سے ہر ایک کی **انتہا ۱** ہے لیکن جب ان اجزائے ضربی کی تعداد بہت بڑی یعنی لاتناہی ہو جاتی ہے تو ہم نہیں کہہ سکتے کہ حاصل ضرب کی انتہا بھی ۱ ہوگی ۔

اسی کے ساتھ ہم $\left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا ایک دوسری شکل میں حاصل کرینگے ۔

اگر لا = ۰ تو $\left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = ۱^{\text{ن}}$ اور اس لیے $\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = ۱$

اور اگر لا $\neq$ ۰ تو ہم رکھتے ہیں ن = م لا ، پس چونکہ لا ایک محدود ہے اس لیے جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے اسی طرح م بھی بڑھتا جاتا ہے یعنے جبکہ ن $\to \infty$ تو م $\to \infty$

پس

$$\left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \left(۱ + \frac{\text{لا}}{\text{م لا}}\right)^{\text{م لا}}$$

$$= \left\{\left(۱ + \frac{۱}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

اب اگرچہ ن مثبت صحیح عدد ہے لیکن لا چونکہ کوئی حقیقی عدد ہو سکتا ہے اس لیے ضروری نہیں ہے کہ م صحیح عدد ہو ۔ ہم نے دفعۂ گزشتہ میں ثابت کیا ہے کہ ن جب مثبت صحیح عددوں سے مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے تو $\left(۱ + \frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی انتہا و ہوتی ہے ۔ لیکن یہ بھی ثابت کیا جا سکتا ہے کہ چاہے ن مثبت صحیح عدد ہو یا نہو $\text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ ہمیشہ و کے مساوی ہوتی ہے ۔

پس اگر م کوئی عدد ہو تو

$$\text{نہا}_{\text{م} \to \infty} \left(۱ + \frac{۱}{\text{م}}\right)^{\text{م}} = \text{و} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

اس لیے مساوات (۴) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{لا}{ن}\right)^{ن} = \underset{م\to\infty}{\text{نہا}}\left\{\left(1+\frac{1}{م}\right)^{م}\right\}^{لا}$$

$$= \left\{\underset{م\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{م}\right)^{م}\right\}^{لا}$$

$$= و^{لا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۵)$$

جہاں $و^{لا}$ اسی طرح ایک قوت نما کو تعبیر کرتا ہے جیسے $۲^{لا}$ ۔ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{لا}{ن}\right)^{ن} = 1 + لا + \frac{لا^2}{\lfloor 2} + \frac{لا^3}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{لا^ر}{\lfloor ر} + \cdots \infty \text{ ارقام}$$

$$= و^{لا}$$

$$= (2.7182818\ldots\ldots)^{لا} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۶)$$

اس میں اگر ہم بطور خاص صورت کے لا = ۱ رکھیں تو ملتا ہے کہ

$$\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{1}{ن}\right)^{ن} = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$

$$= و = 2.7182818$$

جو گذشتہ دفعہ کی مساوات (۹) میں حاصل ہوا تھا۔

اس کے علاوہ ہم اوپر بتلا چکے ہیں کہ اگر لا = ۰ تو $\underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{لا}{ن}\right)^{ن} = 1$، پس

$$و^{0} = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۷)$$

نیز اگر لا اور ما کوئی دو عدد ہوں جو صفر نہ ہوں تو

$$و^{لا+ما} = \underset{ن\to\infty}{\text{نہا}}\left(1+\frac{لا+ما}{ن}\right)^{ن} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (۸)$$

اس میں رکھو $ن = م(لا + ما)$ تو $م \to \infty$ جبکہ $ن \to \infty$

پس

$$\left(1 + \frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \left(1 + \frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{م}(\text{لا}+\text{ما})}\right)^{\text{م}(\text{لا}+\text{ما})}$$

$$= \left\{\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}+\text{ما}}$$

$$= \left\{\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}} \times \left\{\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{ما}}$$

اس لیے

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہیا}}\left(1 + \frac{\text{لا}+\text{ما}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہیا}}\left[\left\{\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}} \times \left\{\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{ما}}\right]$$

$$= \left\{\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہیا}}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{لا}} \times \left\{\underset{\text{م}\to\infty}{\text{نہیا}}\left(1 + \frac{1}{\text{م}}\right)^{\text{م}}\right\}^{\text{ما}}$$

$$= \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{ما}} \quad \ldots\ldots (9)$$

پس مساواتوں (۸) اور (۹) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{و}^{\text{لا}+\text{ما}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{\text{ما}} \quad \ldots\ldots (10)$$

یہ مساوات (۱۰) چونکہ لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے اس لیے بطور خاص صورت کے ہم اس میں درج کرتے ہیں کہ ما = - لا، تب

$$\text{و}^{\text{لا}-\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{-\text{لا}}$$

یعنی

$$\text{و}^{0} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{-\text{لا}}$$

یعنی

$$1 = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{و}^{-\text{لا}}$$

پس

$$\text{و}^{-\text{لا}} = \frac{1}{\text{و}^{\text{لا}}} \quad \ldots\ldots (11)$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل $و^{لا}$ تمام قوت نمائی قوانین کو پورا کرتا ہے تفاعل $و^{لا}$ کو "قوت نمائی تفاعل" کہتے ہیں۔

$و^{لا}$ کے لیے جو سلسلہ $۱ + لا + \frac{لا^{۲}}{۲!} + \frac{لا^{۳}}{۳!} + \ldots\ldots$ حاصل ہوتا ہے اس کی مدد سے بآسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے تفاعل $و^{لا}$ کی قیمت مثبت ہوتی ہے اور اگر لا منفی ہو یعنے - ما کے برابر ہو جہاں ما مثبت ہے تو $و^{لا} = و^{-ما} = \frac{۱}{و^{ما}}$ اور چونکہ ما مثبت ہے اس لیے $و^{ما}$ مثبت ہے اور اس لیے $\frac{۱}{و^{ما}}$ بھی مثبت ہے۔ پس معلوم ہوا کہ لا کی منفی قیمتوں کے لیے بھی تفاعل $و^{لا}$ کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ غرض کہ $و^{لا}$ کی قیمت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے چاہے لا مثبت ہو یا منفی

نیز اگر لا > ۰ تو

$$و^{لا} > ۱ + لا$$

اس لیے جوں جوں لا بڑھتا جاتا ہے اسی طرح $و^{لا}$ بھی بڑھتا جاتا ہے یعنے

$$\lim_{لا \to \infty} و^{لا} = \infty \quad \ldots\ldots\ldots (۱۲)$$

اب اگر لا ایک منفی عدد ہو اور - ما کے مساوی ہو جہاں ما مثبت عدد ہے تو

$$و^{لا} = و^{-ما} = \frac{۱}{و^{ما}}$$

لیکن جب لا ← - ∞ تو ما ← + ∞

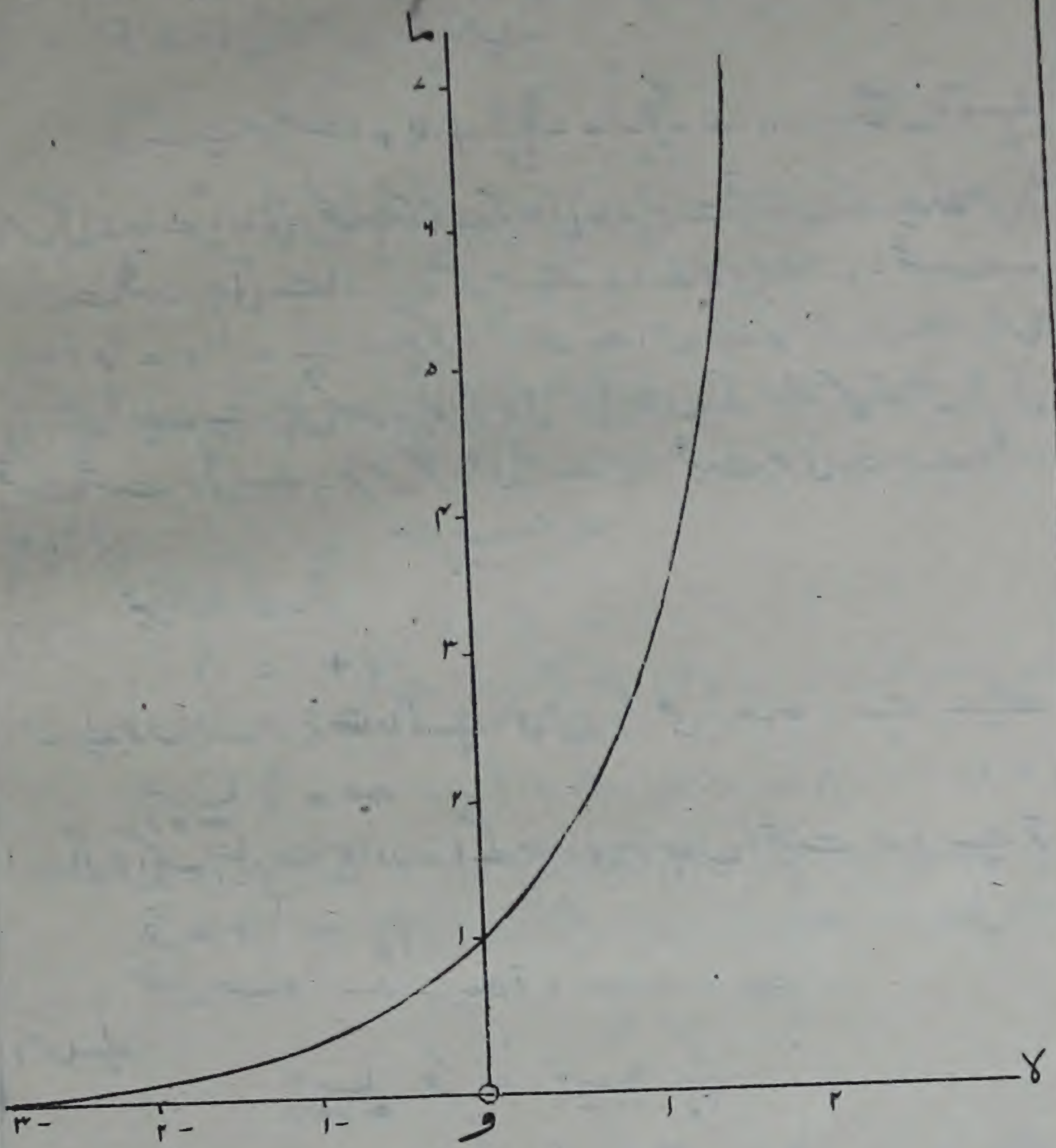
اس لیے

$$\lim_{لا \to -\infty} و^{لا} = \lim_{ما \to \infty} \frac{۱}{و^{ما}}$$

$$= ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۱۳)$$

غرض کہ $و^{لا}$ کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت صفر ہے جبکہ لا ← - ∞ ہو اور اس کے بعد اس کی قیمت بڑھتی جاتی ہے یہاں تک کہ لا = ۰ کے لیے قیمت ۱ ہو جاتی ہے اور پھر بڑھتے ہوئے لا = + ∞ پر تفاعل $و^{لا}$ کی قیمت بھی + ∞ ہو جاتی ہے۔ ذیل میں ہم اس تفاعل کی ترسیم دیتے ہیں جس سے منحنی ما = $و^{لا}$ کی شکل طالب علم کو معلوم ہو جائیگی۔

شکل سے ظاہر ہے کہ لا کی مثبت قیمتوں کے لیے تفاعل ولا بہت جلد بڑھتا جاتا ہے

منحنی ما = ولا کی ترسیم

اور لا کی منفی قیمتوں کے لیے بہت جلد گھٹتا ہے۔ نیز یہ بھی فوراً معلوم ہوتا ہے
کہ منحنی مسلسل ہے یعنے تفاعل ولا کی قیمت بتدریج مسلسل بدلتی ہے یعنے تفاعل ولا،
لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔ اس کا باضابطہ ثبوت بھی دیا جا سکتا ہے۔
اسی ضمن میں ہم ایک انتہا کی قیمت معلوم کرینگے جس کی ہمیں آئندہ ضرورت

ہو گی -

فرض کرو کہ ھ کوئی چھوٹا عدد ہے، تب

$$و^{ھ} = ۱ + ھ + \frac{ھ^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{ھ^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{ھ^{۴}}{\lfloor ۴} + \cdots\cdots$$

اس لیے

$$و^{ھ} - ۱ = ھ + \frac{ھ^{۲}}{\lfloor ۲} + \frac{ھ^{۳}}{\lfloor ۳} + \frac{ھ^{۴}}{\lfloor ۴} + \cdots\cdots$$

اس لیے $\frac{و^{ھ} - ۱}{ھ} = ۱ + ھ \left(\frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{ھ}{\lfloor ۳} + \frac{ھ^{۲}}{\lfloor ۴} + \cdots + \frac{ھ^{ن}}{\lfloor ن+۲} + \cdots \right)$

لیکن اگر ھ $<$ ۱ تو

$$\frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{ھ}{\lfloor ۳} + \frac{ھ^{۲}}{\lfloor ۴} + \cdots < + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۱}{\lfloor ۴} + \cdots$$

$$< و$$

پس ھ کی کافی چھوٹی قیمتوں کے لیے

$$\frac{و^{ھ} - ۱}{ھ} < ۱ + ھ . و \quad \cdots\cdots (۱۴)$$

اب ظاہر ہے کہ ھ کی کافی چھوٹی قیمت لینے پر ہم ھ و کو جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں یعنے $\frac{و^{ھ}-۱}{ھ}$ کو ۱ کے جتنا چاہیں قریب لا سکتے ہیں پس

$$\underset{ھ \to ۰}{نہا} \frac{و^{ھ} - ۱}{ھ} = ۱ \quad \cdots\cdots (۱۵)$$

۲ء۴۶ - لوکارتمی تفاعل -

تعریف :- یہ تفاعل اوپر کے قوت نمائی تفاعل $و^{لا}$ کا مقلوب ہے یعنے اگر ا کوئی حقیقی عدد ہو اور اگر $و^{ا}$ کی قیمت لا کے مساوی ہو تو کہتے ہیں کہ "ا لوکارتم ہے لا کا اساس و پر" اور اس کو "$لوگ_{و}$ لا" لکھتے ہیں۔ یعنے اگر

$$لا = و^{ا} \quad \cdots\cdots (۱)$$

تو

ما = لوک و لا ....(۲)

اس تفاعل کے مفہوم کو سمجھنے کے لیے فرض کرو کہ ہمیں ایک حقیقی عدد لا دیا گیا ہے ہم دریافت کرنا چاہتے ہیں کہ عدد و کو کس قوت پر اٹھایا جائے کہ حاصل لا ملے۔ اسی مطلوبہ قوت کو ہم لوک و لا کہتے ہیں اور ما = لوک و لا کو لوکارتمی تفاعل کہتے ہیں۔ اس کو "نیپیر کے لوکارتم" یا "طبعی لوکارتم" بھی کہتے ہیں اور لوک کے نیچے حرف و اس لیے لکھا جاتا ہے تاکہ اس کو معمولی لوکارتموں سے جو ۱۰ کے اساس پر لیے جاتے ہیں تمیز کیا جا سکے۔ آئندہ ہم جب کبھی لوک لا لکھیں تو اس سے مراد یہی لوک و لا ہوگی۔ اگر ہمیں ۱۰ کے اساس والے لوکارتم کی ضرورت ہو تو ہم اس کو ہمیشہ لوک ۱۰ لا سے تعبیر کرینگے۔

اب ہم تفاعل ما = لوک لا کی قیمتوں پر غور کرینگے۔ یہاں چونکہ

لا = و^ما

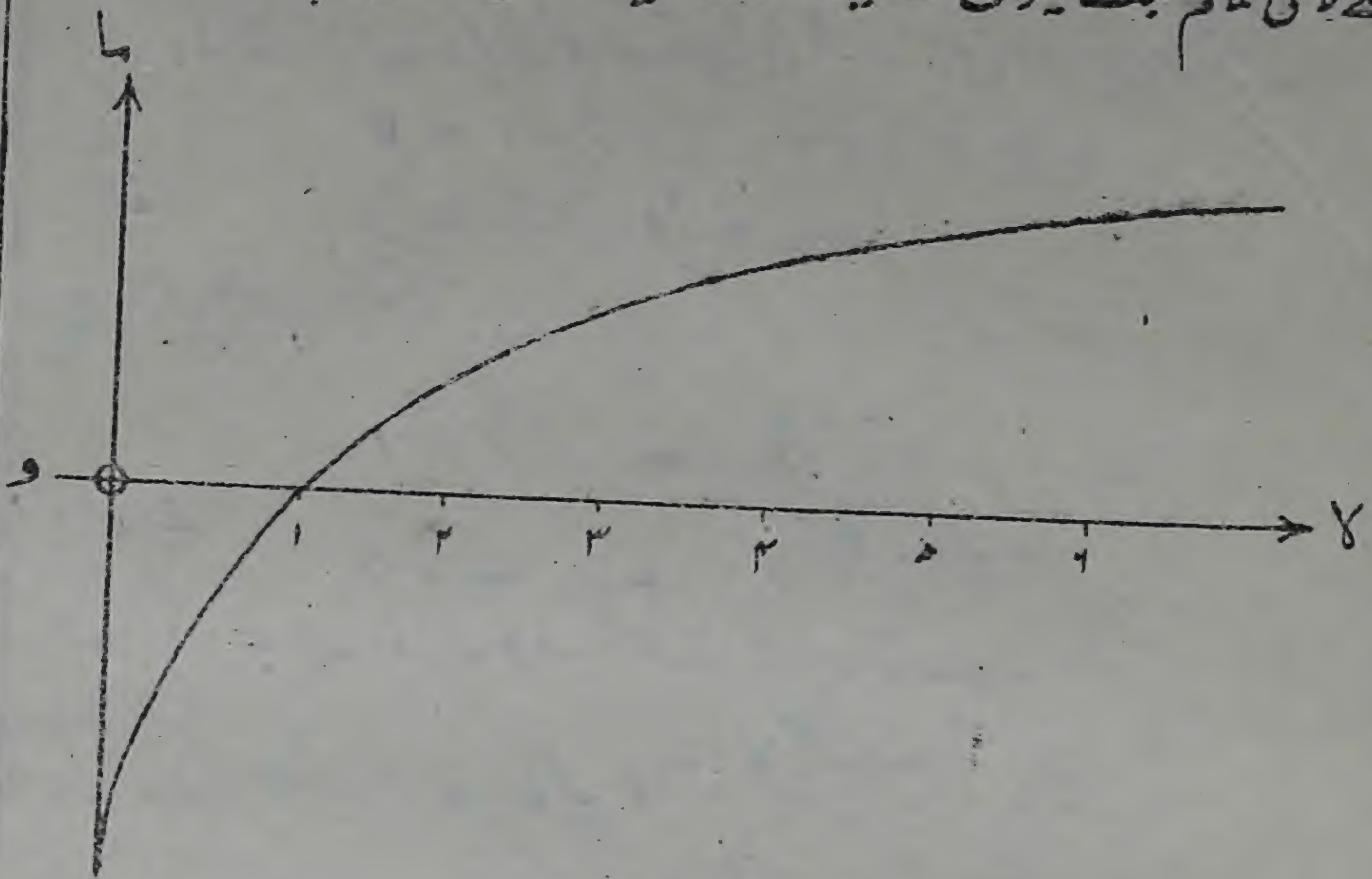
اور دفعہ گذشتہ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر (۱) ما = - ∞ تو لا = و^-∞ = ۰ (۲) اگر ما = ۰ تو لا = و^۰ = ۱ (۳) اور اگر ما = + ∞ تو لا = و^+∞ = ∞ یعنے جب ما، - ∞ سے شروع کر کے صفر میں سے ہوتے ہوئے + ∞ تک جاتا ہے تو لا صفر سے شروع کر کے ایک میں سے ہوتے ہوئے + ∞ تک جاتا ہے پس معلوم ہوا کہ ما = لوک لا کی قیمت (۱) لا = ۰ تو ما = - ∞ (۲) لا = ۱ تو ما = ۰ اور (۳) لا = ∞ تو ما = ∞ ہے یعنی جبکہ لا صفر سے شروع کر کے ایک میں سے ہوتے ہوئے + ∞ تک جاتا ہے تو ما، - ∞ سے شروع کر کے صفر میں سے ہوتے ہوئے + ∞ تک جاتا ہے۔ یعنے تفاعل لوک لا کی قیمت متغیر لا کی صرف مثبت قیمتوں کے لیے موجود ہے اور لا کی منفی قیمتوں کے لیے لوک لا کی قیمت موجود نہیں ہے۔ لا کی قیمت صفر تا ۱ کے لیے لوک لا کی قیمت منفی ہوتی ہے۔ لا = ۱ کے لیے لوک لا = ۰ اور لا کی ۱ سے بڑی قیمتوں کے لیے لوک لا مثبت ہوتا ہے اور لا کے ساتھ بڑا ہوتا جاتا ہے۔ منحنی ما = لوک لا کی ترسیم ذیل کی شکل میں دی گئی ہے جس سے معلوم ہوگا کہ لوک لا کا منحنی مسلسل ہے

یعنے لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے لوک لا ایک مسلسل تفاعل ہے۔

ما

و

لا

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

منحنی ما = لوک$_و$ لا کی ترسیم

لوک لا کی اس تعریف کی بناء پر ہم کو حسب ذیل خاصیتیں حاصل ہوتی ہیں:-

(ا) فرض کرو کہ لا = و^{ما} یعنے ما = لوک لا، تب

$$و^{لوک\ لا} = و^{ما} = لا \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

(ب) نیز

$$لوک\ و^{ما} = لوک\ لا = ما \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۴)$$

یہ خاصیتیں جو مساواتوں (۳) اور (۴) سے تعبیر ہوتی ہیں بدیہی ہیں کیونکہ اعمال قوت نما اور لوکارتم مقلوب تفاعل ہیں۔ اور اس لیے اگر ہم ایک عدد لا کا لوکارتم لیں اور پھر و کو اس لوکارتم کی قوت پر اٹھائیں تو ہمیں وہی ابتدائی عدد لا حاصل ہونا چاہیے۔ اس طرح ہم اگر و کو ایک قوت ما پر اٹھائیں اور پھر اس حاصل کا لوکارتم لیں تو ہمیں وہی ابتدائی عدد ما حاصل ہونا چاہیے

کیونکہ یہ دونوں اعمال ایک دوسرے کو زائل کر دیتے ہیں ۔

(ج) فرض کرو کہ ﻟ اور ب کوئی دو مثبت حقیقی عدد ہیں اور فرض کرو کہ

$$لا = لوک\ ﻟ \quad،\quad ما = لوک\ ب$$

یعنی

$$و^{لا} = ﻟ \quad،\quad و^{ما} = ب$$

اب ہمیں معلوم ہے کہ

$$و^{لا} \times و^{ما} = و^{لا + ما}$$

اس لیے

$$ﻟ \times ب = و^{لوک\ ﻟ + لوک\ ب}$$

اس مساوات میں دونوں طرف لوکارتم لینے پر ملتا ہے کہ

$$لوک\ ﻟ ب = لوک\ و^{لوک\ ﻟ + لوک\ ب}$$

$$= لوک\ ﻟ + لوک\ ب \quad .... (۵)$$

پس معلوم ہوتا ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کا لوکارتم ان عددوں کے لوکارتموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے ۔

(د) مساوات (۵) میں ب چونکہ کوئی عدد ہو سکتا ہے اس لیے ہم لیتے ہیں کہ ب = $\frac{۱}{ﻟ}$ جہاں ﻟ کوئی مثبت عدد ہے، پس

$$لوک\ ﻟ \times \frac{۱}{ﻟ} = لوک\ ﻟ + لوک\ \frac{۱}{ﻟ}$$

یعنی

$$لوک\ ۱ = لوک\ ﻟ + لوک\ \frac{۱}{ﻟ}$$

چونکہ لوک ۱ = ۰ اس لیے

$$۰ = لوک\ ﻟ + لوک\ \frac{۱}{ﻟ}$$

یعنی

$$لوک\ \frac{۱}{ﻟ} = -\ لوک\ ﻟ \quad .... (۶)$$

(ھ) اب فرض کرو کہ ﻟ کوئی مثبت عدد ہے تو ہمیں معلوم ہے کہ

$$ﻟ = و^{لوک\ ﻟ}$$

اس لیے اگر لا کوئی حقیقی عدد ہو تو ہم $\text{ل}^{\text{لا}}$ کی حسب ذیل تعریف کرتے ہیں :

$$\text{ل}^{\text{لا}} = \left\{\text{و}^{\text{لوک ل}}\right\}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا لوک ل}} \quad ......(۷)$$

یعنے $\text{ل}^{\text{لا}} = ۱ + \text{لا لوک ل} + \frac{\text{لا}^{۲}}{|۲}(\text{لوک ل})^{۲} + \frac{\text{لا}^{۳}}{|۳}(\text{لوک ل})^{۳} + \frac{\text{لا}^{۴}(\text{لوک ل})^{۴}}{|۴} + ...\infty$ ارقام (۸)

نیز (۷) میں دونوں طرف لوکارتم لینے سے ملتا ہے کہ

$$\text{لوک ل}^{\text{لا}} = \text{لوک و}^{\text{لا لوک ل}} = \text{لا لوک ل} \quad ......(۹)$$

(و) اساس و کے لحاظ سے معلوم کیے ہوئے لوکارتموں کو اساس ۱۰ کے لحاظ سے لوکارتموں میں اور اس کے برعکس اساس ۱۰ کے لحاظ سے معلوم کیے ہوئے لوکارتموں کو اساس و کے لحاظ سے لوکارتموں میں تبدیل کرنے کے لیے حسب ذیل قاعدہ اختیار کیا جاتا ہے :-

فرض کرو کہ $\text{لوک}_{۱۰}\,\text{لا} = \text{ما}$

تو $\text{لا} = ۱۰^{\text{ما}}$

اس لیے دونوں طرف اساس و پر لوکارتم لینے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} = \text{ما}\ \text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰$$

یعنے $\text{ما} = \frac{\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا}}{\text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰}$

یعنے $\text{لوک}_{۱۰}\,\text{لا} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} \times \frac{۱}{\text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰} \quad ......(۱۰)$

لیکن حساب لگا کر معلوم کیا گیا ہے کہ

$$\frac{۱}{\text{لوک}_{\text{و}}\,۱۰} = ٫۴۳۴۲۹ \quad ......(۱۱)$$

مشقی سوالات ۶

ذیل کی انتہائیں دریافت کرو:-

(۱) $\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^۳ - ۱}{\text{لا} - ۱}$ (۲) $\underset{\text{لا}\to ۲}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\frac{۳}{۲}} - ۸^{\frac{۱}{۲}}}{\text{لا} - ۲}$ (۳) $\underset{\text{لا}\to -\text{ی}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^۳ + \text{ی}^۳}{\text{لا} + \text{ی}}$

(۴) $\underset{\text{لا}\to \text{ی}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ی}^{\text{ن}}}{\text{لا} - \text{ی}}$ (۵) $\underset{\text{لا}\to -\text{ی}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲\text{ن}+۱} + \text{ی}^{۲\text{ن}+۱}}{\text{لا} + \text{ی}}$ (۶) $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^۳ - \text{لا}^۳}{\text{ھ}}$

(۷) $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\frac{۲}{۳}} - \text{لا}^{\frac{۲}{۳}}}{\text{ھ}}$ (۸) $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\frac{۱}{۲}} - \text{لا}^{\frac{۱}{۲}}}{\text{ھ}}$

(۹) $\underset{\text{ھ}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا}+\text{ھ})^{\frac{۱}{\text{ن}}} - \text{لا}^{\frac{۱}{\text{ن}}}}{\text{ھ}}$ (۱۰) $\underset{\text{لا}\to \text{ب}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^۴ - ۴\text{لا}^۳\text{ب} + ۶\text{لا}^۲\text{ب}^۲ - ۴\text{لا}\text{ب}^۳ + \text{ب}^۴}{(\text{لا}^۲ - \text{ب}^۲)(\text{لا}^۲ - \text{ی}^۲)}$

(۱۱) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\sqrt{\text{ی} + \text{لا}} - \sqrt{\text{ی}}}{\text{لا}}$ (۱۲) $\underset{\text{لا}\to -۲}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^۳ + ۸}{\text{لا}^۵ + ۳۲}$

(۱۳) $\underset{\text{لا}\to \text{ی}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^۲ - \text{ی}^۲}{\text{لا}^۳ - \text{ی}^۳}$ (۱۴) $\underset{\text{لا}\to \text{ی}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا} - \text{ی}}{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ی}^{\text{ن}}}$ (۱۵) $\underset{\text{لا}\to \text{ی}}{\text{نہا}} \frac{\sqrt{\text{لا}} - \sqrt{\text{ی}}}{\text{لا}^{\frac{۱}{۳}} - \text{ی}^{\frac{۱}{۳}}}$

۱۶ و ۱۷ - $\underset{\text{ط}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = ۱$ اور $\underset{\text{ط}\to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = ۱$

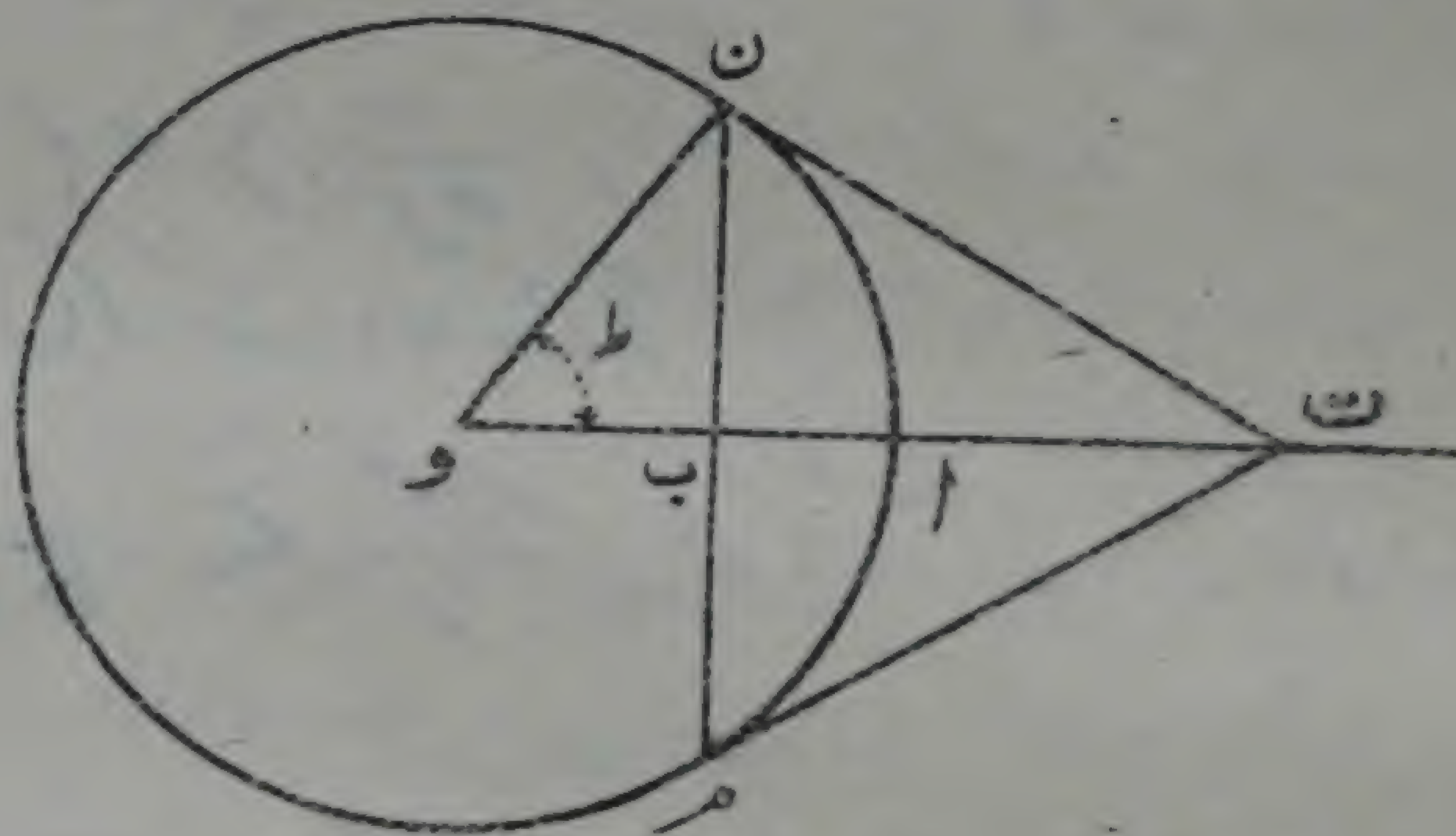
(زاویہ ط کو نیم قطریوں میں ناپا گیا ہے)

ذیل کی شکل میں فرض کرو کہ ن و ا نیم قطریوں میں ایک زاویہ ط کو تعبیر کرتا ہے جو $\frac{\pi}{۲}$ سے کم ہے اور جو نصف قطر والے دائرہ کے مرکز و پر واقع ہے۔ فرض کرو کہ ھ ن ایک دائرہ کا وتر ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ہے۔ ن ت نقطہ ن پر کا ماس اور ھ ت نقطہ ھ پر کا ماس ہے اور خط مستقیم و ت خط ن ھ کو نقطہ ب پر اور قوس ن ھ کو نقطہ ا پر قطع کرتا ہے۔

فرض کرو کہ زاویۂ ن و ا = ط نیم قطری؛ تب ظاہر ہے کہ

وتر ن م < قوس ن م < ن ت + ت م ....(۱)

اس لیے ½ وتر ن م < ½ قوس ن م < ½ (ن ت + ت م)

یعنے　ن ب < قوس ن ا < ن ت ....(۲)

اس لیے　ن ب / و ن < قوس ن ا / و ن < ن ت / و ن ......(۳)

پس تعریفوں کے بموجب

جب ط < ط < مس ط ....(۴)

اگر اس نامساوات میں ہر ایک جملہ کو جب ط سے تقسیم کیا جائے تو ملتا ہے

۱ < ط / جب ط < ۱ / جم ط

اگر اس آخری نامساوات میں رقموں کو الٹ دیا جائے تو حاصل ہوتا ہے:

۱ > جب ط / ط > جم ط ....(۵)

یعنے ہم دیکھتے ہیں کہ چاہے ط کی کچھ ہی قیمت کیوں نہ ہو کسر جب ط / ط کی قیمت ہمیشہ ۱ اور جم ط کی قیمت کے درمیان واقع ہوتی ہے ۔ لیکن ہمیں معلوم ہے کہ

نہایا (ط ← ۰) جم ط = جم ۰ = ۱

یعنے ط کی کافی چھوٹی قیمت لینے پر جم ط کو جس قدر چاہیں ا کے قریب لا سکتے ہیں اور اس وقت $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ بدرجۂ اولی ا کے قریب آجائیگا اس لیے

$$\underset{\text{ط}\to ٠}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = ١ \quad \ldots\ldots (٦)$$

اسی طرح اگر نامساوات (۴) کی ہر رقم کو مس ط سے تقسیم کیا جائے تو ملتا ہے

$$\text{جم ط} < \frac{\text{ط}}{\text{مس ط}} < ١$$

اور اگر اس میں رقموں کو اُلٹ دیا جائے تو

$$\frac{١}{\text{جم ط}} > \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} > ١ \quad \ldots\ldots (٧)$$

اب چونکہ $\underset{\text{ط}\to ٠}{\text{نہا}} \frac{١}{\text{جم ط}} = \frac{١}{\underset{\text{ط}\to ٠}{\text{نہا}}\ \text{جم ط}} = ١$

یعنے ط کو کافی چھوٹا لینے پر $\frac{١}{\text{جم ط}}$ کو ہم جس قدر چاہیں ا کے قریب لا سکتے ہیں اس لیے $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ بدرجۂ اولی ا کے قریب آجاتا ہے، پس

$$\underset{\text{ط}\to ٠}{\text{نہا}} \frac{\text{مس ط}}{\text{ط}} = ١ \quad \ldots\ldots (٨)$$

غرض کہ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ اور $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ دونوں کی انتہا ا ہے جبکہ ط مائل بہ صفر ہو فرق یہ ہے کہ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ ہمیشہ ا سے چھوٹا رہتا ہے اور بڑھتے ہوئے بتدریج ا کے قریب آتا ہے۔ اس کے برخلاف $\frac{\text{مس ط}}{\text{ط}}$ ہمیشہ ا سے بڑا رہتا ہے اور گھٹتے ہوئے بتدریج ا کی طرف آتا ہے۔

نیز ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{و ن}} \div \frac{\text{قوس ا ن}}{\text{و ن}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{قوس ا ن}}$

لیکن جب زاویۂ ط چھوٹا ہوتا ہے تو نقطۂ ن محیط پر نقطۂ ا کے قریب

آتا ہے اور اس لیے قوس ا ن اور نیز خط ب ن دونوں صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں - یعنے اگرچہ $\underset{ط \to ۰}{\text{نہا}}$ قوس ا ن = ۰
اور $\underset{ط \to ۰}{\text{نہا}}$ خط ب ن = ۰ لیکن

$$\underset{ط \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{ب ن}}{\text{قوس ا ن}} = ۱$$

پس معلوم ہوتا ہے کہ اگرچہ دو مقداریں خود بے حد چھوٹی کیوں نہ ہو جائیں ان کی نسبت ایک محدود عدد ہو سکتی ہے، یعنے یہ ضروری نہیں ہے کہ دو بے حد چھوٹی مقداروں کی نسبت بھی چھوٹی ہو -

ذیل میں ایک جدول کی مدد سے ہم بتلائینگے کہ اگر ط چھوٹا ہوتا ہے تو جب ط کی کیا قیمت ہوتی ہے اور یہ نسبت کس طرح ۱ کے قریب ہوتی جاتی ہے:-

اگر ط = ۵° تو ط = ۰۸۷۲۶۶۵ء۰ نیم قطری، جب ط = ۰۸۷۱۵۵۷ء۰، تو $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۹۹۸۷۳ء۰

ط = ۲° تو ط = ۰۳۴۹۰۶۶ء۰ " ، جب ط = ۰۳۴۸۹۹۵ء۰، $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۹۹۹۸۰ء۰

ط = ۱° تو ط = ۰۱۷۴۵۳۳ء۰ " ، جب ط = ۰۱۷۴۵۲۴ء۰، $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۹۹۹۹۵ء۰

ط = ۳۰′ تو ط = ۰۰۸۷۲۶۶ء۰ " ، جب ط = ۰۰۸۷۲۶۵ء۰، $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۹۹۹۹۹ء۰

ط = ۱۰′ تو ط = ۰۰۲۹۰۸۹ء۰ " ، جب ط = ۰۰۲۹۰۸۹ء۰، $\frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۹۹۹۹۹۹....ء۰

وغیرہ

نوٹ ۱ - یاد رکھنا چاہیے کہ $\underset{ط \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ط}}{\text{ط}}$ = ۱ صرف اسی صورت میں صحیح ہے جبکہ ط کو نیم قطریوں میں ناپا جائے - اگر زاویہ لا کو درجوں میں ناپا جائے تو

$$\underset{لا \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}^\circ}{\text{لا}^\circ} = \underset{لا \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{جب لا}^\circ}{\frac{\pi}{۱۸۰}\text{لا}^\circ} \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۱ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۰۱۷ء۰$$

جیسا کہ ہم نے دفعہ ۵۵ء امثال ۲ میں بیان کیا تھا -

دوسری بات یہ ہے کہ جس زاویہ کی جیب لے رہے ہیں اس کو اسی زاویہ سے تقسیم کرنے کے بعد اگر زاویہ کو صفر کی طرف مائل کریں تو

نسبت کی انتہا ۱ ہوتی ہے یعنے یہ صحیح نہیں ہے کہ $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{لا}}$ = ۱ بلکہ اس انتہا کو یوں معلوم کرنا چاہیے :

$$\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{لا}} = \underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}\ ۲\ \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{۲ لا}} = ۲\ \underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{۲ لا}}$$

$$= ۲ \times ۱ = ۲$$

یعنے $\frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{لا}}$ کی انتہا ۲ ہوتی ہے نہ کہ ۱ ۔

مشقی سوالات ۷ ۔

ذیل کی انتہائیں دریافت کرو :۔

(۱) $\underset{\text{ط}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ۲ ط}}{\text{جب ط}}$ (۲) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{مس ۳ لا}}$

(۳) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{۲ لا}^{۲}\text{ جم لا}}{\text{۱ - جم ۲ لا}}$ (۴) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{۳ جب لا - جب ۳ لا}}{\text{لا}^{۳}}$

(۵) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{۲ جب لا - جب ۲ لا}}{\text{لا}^{۲}}$ (۶) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مس}^{۲}\text{ لا - جب}^{۲}\text{ لا}}{\text{لا}^{۴}}$

(۷) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{۱ - جم ۴ لا}}{\text{لا}^{۲}}$ (۸) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مس ۲ لا - جب ۲ لا}}{\text{لا}^{۳}}$

(۹) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{جب ۳ لا - جم ۲ لا}}{\text{جب ۲ لا}}$ (۱۰) $\underset{\text{لا}\to \text{عہ}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا جب عہ - عہ جب لا}}{\text{لا - عہ}}$

باب سوّم

تفرّق اور تفرّقی سر

۱ء۳ :۔ اس باب میں تبوع متغیر کی قیمت میں تغیر کی وجہ سے تفاعل کی قیمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس پر غور کیا جائیگا ۔ بالخصوص تبوع متغیر اور تفاعل کی قیمتوں میں تبدیلی کی نسبت لی جائیگی ۔ اور اس سے بدلنے کی شرح کا ناپ دریافت کیا جائیگا ۔ یہ ناپ علم احصاء کی بنیاد ہے ۔

۲ء۳ :۔ **فرق** : فرض کرو کہ ما = ف (لا) کوئی تفاعل ہے اس کے کسی نقطہ لا = لہ پر غور کرو ۔ اب اگر تبوع متغیر لا کی قیمت لہ + ھ کر دی جائے تو تبوع متغیر کی قیمتوں میں فرق ھ ہے ۔ اس امر کو علامتوں سے بیان کرنے کے لیے اگر محدود فرق کو اختصاراً "مف" سے تعبیر کیا جائے تو لکھ سکتے ہیں کہ مف لا = ھ، علامت مف لا سے لا کا محدود فرق مراد ہے ۔ اس کو غلطی سے مف × لا نہ سمجھ لیا جائے ۔ اسی طرح ف (لا) میں نقطہ لا = لہ پر فرق ہوگا ف (لہ + ھ) ۔ ف (لہ) جس کو مف [ف (لہ)] سے تعبیر کیا جا سکتا ہے ۔ مثالاً امر کافی ما = ۴ لا^2 کے نقطہ لا = ۲ پر غور کرو ۔ اس نقطہ کے محدد (۲، ۱۶) ہونگے ۔ اب اگر لا کی قیمت ۳ ہو جائے تو ما = ۳۶ ہے یعنی

مف لا = ۱ تو مف ما = ۲۰ اسی طرح

اگر مف لا = +۲ تو مف ما = ۴۸

مف لا = − ۳/۲　　مف ما = − ۱۵

اب مکانی کے ایک دوسرے نقطہ لا = ۵ پر غور کرو - ظاہر ہے کہ ما = ۱۰۰

اس پر اگر مف لا = ۲　　تو　　مف ما = ۹۶

مف لا = − ۳/۲　　مف ما = −۵۱

مف لا = − ۹/۲　　مف ما = − ۹۹　وغیرہ وغیرہ

اس سے ظاہر ہے کہ تابع متغیر کا فرق بالعموم لا اور مف لا دونوں کی قیمتوں پر منحصر ہے - عام صورت میں اگر مکانی کا کوئی نقطہ (لا، ما) ہو تو

مف ما = ۴ (لا + مف لا)^{2} − ۴ لا^{2}

= ۸ لا (مف لا) + ۴ (مف لا)^{2}

یعنی مف ما متبوع متغیر لا اور اس کے فرق مف لا دونوں کا تفاعل ہے اور اس رشتہ میں لا اور مف لا کی دی ہوئی قیمتیں درج کر کے مف ما کی قیمتیں نکالی جا سکتی ہیں -

اسی طرح اگر ما = ف (لا) کے کسی نقطہ (لا، ما) پر غور کریں تو

مف ما = ف (لا + مف لا) − ف (لا)

توضیحی مثالیں

مثال (۱) ما = (۴ لا + ۵)^{3} میں مف ما کی قیمت دریافت کرو جبکہ

لا = − ۳　اور مف لا = −۱، ۱، ۱/۲، −۱/۲، −۵/۴

مف ما = [۴ (لا + مف لا) + ۵]^{3} − (۴ لا + ۵)^{3}

= (۴ لا + ۵ + ۴ مف لا)^{3} − (۴ لا + ۵)^{3}

= (۴ مف لا)^{3} + ۳ × (۴ مف لا) × (۴ لا + ۵) (۴ لا + ۵ + ۴ مف لا)

= ۱۲ (مف لا) (۴ لا + ۵)^{2} + ۴۸ (مف لا)^{2} (۴ لا + ۵) + ۶۴ (مف لا)^{3}

اس میں لا = −۳ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

مف ما = ۱۲ × ۴۹ مف لا − ۴۸ × ۷ × (مف لا)^{2} + ۶۴ (مف لا)^{3}

اس لیے مف لا = -۱، ۱، ۱/-۲، ۱/۲، -۵/۴، ۵/۴

مف ما = -۹۸۸، ۳۱۶، -۳۸۶، ۲۱۸، -۱۳۸۵، ۳۳۵

مثال (۲) ما = (۴لا + ۳)/(۳لا - ۲) کے نقطہ لا = ۳ پر مف ما کی قیمت دریافت کرو
جبکہ مف لا = ۱، -۱، ۱/۳، -۱/۳

مف ما = [۴(لا + مف لا) + ۳] / [۳(لا + مف لا) - ۲] − (۴لا + ۳)/(۳لا - ۲)

= [(۴لا + ۳ + ۴مف لا)(۳لا - ۲) - (۴لا + ۳)(۳لا - ۲ + ۳مف لا)] / [(۳لا - ۲)[(۳لا - ۲) + ۳مف لا]]

= [۴مف لا(۳لا - ۲) - ۳مف لا(۴لا + ۳)] / [(۳لا - ۲)² + ۳مف لا(۳لا - ۲)]

= - ۱۷مف لا / [(۳لا - ۲)² + ۳مف لا(۳لا - ۲)]

نقطہ لا = ۳ پر مف ما = - ۱۷مف لا / (۴۹ + ۲۱مف لا)

یعنی مف لا = ۱ ، -۱ ، ۱/۳ ، -۱/۳

مف ما = -۱۷/۷۰ ، ۱۷/۲۸ ، -۱۷/۱۶۸ ، ۱۷/۱۲۶

مثال (۳) ما = جب لا + مس لا کے کسی نقطہ پر مف ما اور مف لا میں رشتہ دریافت کرو - نیز اس کی قیمت معلوم کرو جبکہ لا = ط/۴ اور مف لا = ط/۶ ، -ط/۶

مف ما = جب (لا + مف لا) - جب لا + مس (لا + مف لا) - مس لا

= ۲جم (لا + مف لا/۲) جب مف لا/۲ + جب مف لا / [جم (لا + مف لا) جم لا]

اس لیے اگر لا = ط/۴ اور مف لا = ط/۶

مف ما = ۲ جم π/۳ ۔ جب π/۱۲ + جب π/۶ / (جم ۵π/۱۲ ۔ جم π/۴)

= ۲ × ۱/۲ × (۱ − √۳)/(۲√۲) + (۱/۲) / (۱/√۲ × (۱ − √۳)/(۲√۲)) = (۱ − √۳)/(۲√۲) + ۲/(۱ − √۳)

= (√۲ − √۶)/۴ + ۱ + √۳

اور اگر مف لا = − π/۶

تو مف ما = ۲ جم π/۶ ۔ جب (− π/۱۲) + جب (− π/۶) / (جم π/۱۲ ۔ جم π/۴)

= − ۲ × √۳/۲ × (۱ − √۳)/(۲√۲) − ۱/۲ × ۲√۲/(۱ + √۳) × ۲√۲/۱

= (۳ − √۳)/(۲√۲) − ۲/(۱ + √۳) = (۳√۲ − √۶)/۴ − ۱ + √۳

مشقی سوالات

(۱) مف ما کی قیمت دریافت کرو:۔

(ا) ما = (۲ لا + ۳)^۲ جبکہ لا = −۱، مف لا = ۱/۳، −۱/۳، −۵/۶، −۷/۵، ۲، −۱

(ب) ما = (۴ لا − ۷)^۳ + ۵ لا^۲ جبکہ لا = ۷/۴، اور مف لا = ۱/۲، ۱/۳، ۱، −۱، −۲، −۱/۵

(۲) ف(لا) = (۵ لا + ۷)/(۳ لا − ۱)^۲ میں مف [ف(لا)] کی قیمت دریافت کرو۔
جبکہ لا = − ۷/۵ اور مف لا = ۱/۲، ۱/۳، ۰٫۱، ۰٫۰۱

(۳) ص = ۴ ی^۲ − ۵ ی + ۳ میں مف ص کی قیمت دریافت کرو
جبکہ ی = ۲ اور مف ی = − ۲/۵، − ۳/۵

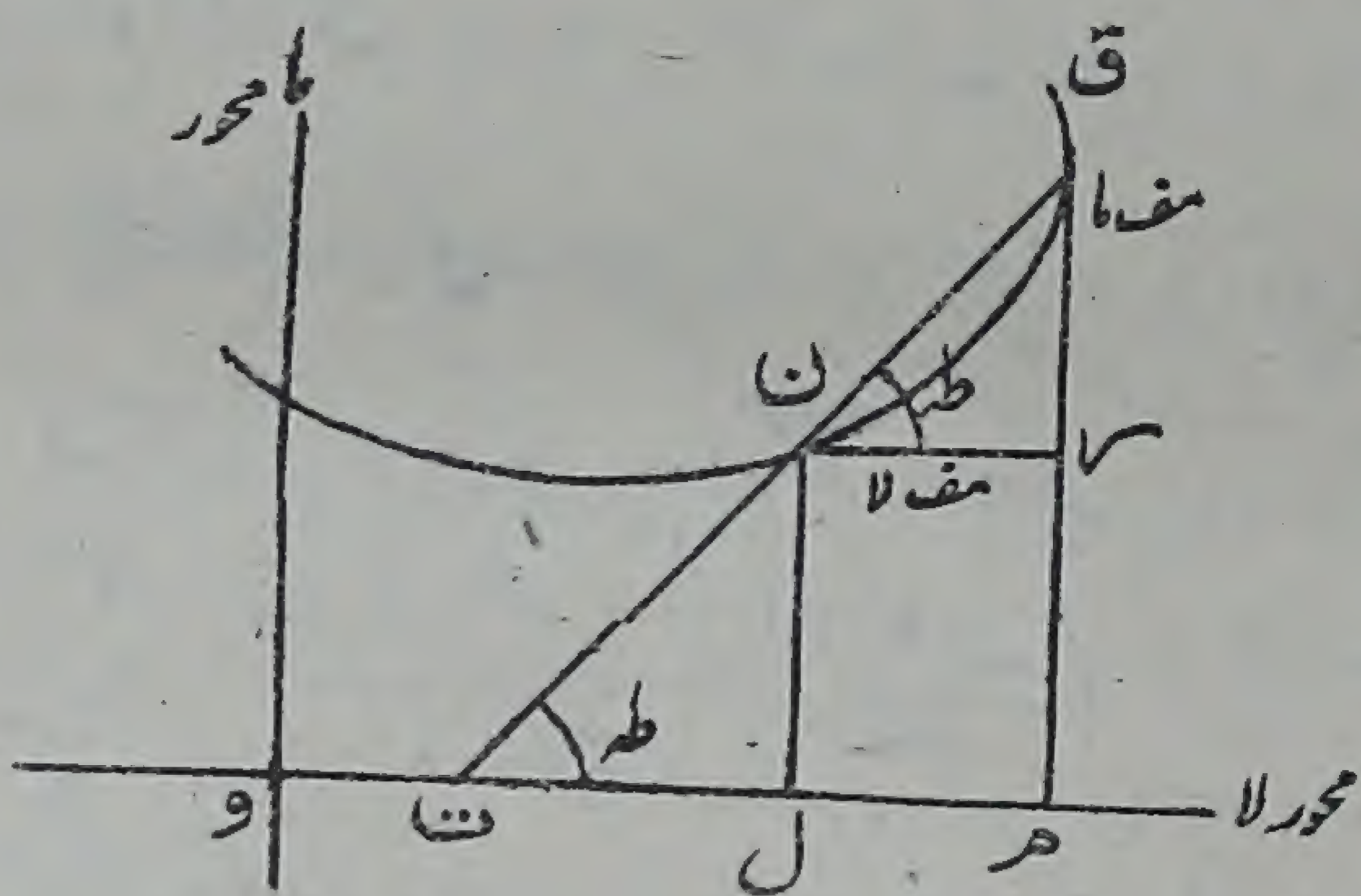
(۴) (ا) لا = ۵ جم طہ
(ب) لا = جب طہ
(ج) لا = − $\frac{۵}{۴}$ مس طہ
(د) لا = ۲ قط طہ + قم طہ

} میں مف لا کی قیمت معلوم کرو جبکہ طہ = ۶۰° اور مف طہ = − ۵° اور ۳۰°

۳ ء ۳ :- نسبت فرق -

پچھلی دفعہ میں مف ما اور مف لا یعنی تابع متغیر اور متبوع متغیر میں محدود فرقوں کی قیمتیں حاصل کی گئی ہیں -

اب ان فرقوں کی نسبت پر غور کرو یعنی $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ اور الفاظ میں $\frac{\text{تابع متغیر کا فرق}}{\text{متبوع متغیر کا فرق}}$ کی قیمت حاصل کرو - اس نسبت $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کا ہندسی اور طبعی مفہوم ذیل سے ظاہر ہوگا -

فرض کرو کہ ما = ف (لا) کی ترسیم کھینچی گئی ہے اور اس پر (لا، ما) کوئی نقطہ ن ہے - نیز نقطہ (لا + مف لا، ما + مف ما) ق ہے - نقاط ن اور ق سے لا محور پر عمود ن ل اور ق ھ گراؤ - نیز ن سے ق ھ پر عمود ن سا کھینچو -

تب ظاہر ہے کہ ھ ل = مف لا = ن سا اور ق سا = مف ما

اور مس |ق ان ما = مس |ن ت ل

$$= \text{مس طہ} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$$

یعنی الفاظ میں قاطع ق ان محور لا کے ساتھ جو زاویہ طہ بناتا ہے اس کا

$$\text{ماس} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$$

پس

$$\text{مس طہ} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$$

اسی طرح فرض کرو کہ ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہے اور طے شدہ فاصلہ اور وقت میں رشتہ ہے۔

س (فٹ) = ۲۰ ت + ۱۶ ت² جہاں وقت ت کو ثانیوں میں شمار کیا گیا ہے

اس میں ت کی کوئی قیمت چار ثانیہ درج کریں تو س = ۸۰ + ۲۵۶ = ۳۳۶ فٹ

یعنی چار ثانیوں میں طے شدہ فاصلہ ۳۳۶ فٹ ہے اور اس دوران میں اوسط رفتار $= \frac{\text{س}}{\text{ت}} = \frac{۳۳۶}{۴} =$ ۸۴ فٹ فی ثانیہ ہے۔ اب اگر ت میں ۲ ثانیوں کا اضافہ کیا جائے تو مف ت = ۲ اور مف س = ۱۲۰ + ۵۷۶ − ۳۳۶ = ۳۶۰ فٹ

یعنی پانچویں اور چھٹے ثانیوں کی اوسط رفتار $= \frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}} = \frac{۳۶۰}{۲} =$ ۱۸۰ فٹ فی ثانیہ۔

لیکن اگر ذرہ کی رفتار بدل رہی ہو تو اوسط رفتار سے کچھ زیادہ فائدہ نہیں ہے اور یہ بہتر ہوگا کہ مف ت کے وقفہ کو حتی الامکان کم کیا جائے اور بجائے اوسط رفتار کے کسی آن پر رفتار نکالنے کی کوشش کی جائے۔

اسی طرح اگر مذکورۂ بالا ہندسی مثال میں نقطہ ق کو نقطہ ن کے قریب لایا جائے تو قاطع ماس کے قریب ہوتا جاتا ہے اور اگر انتہا میں ق کو ن پر منطبق کر دیا جائے تو قاطع ماس ہو جاتا ہے۔

بعض سوالوں میں بالخصوص اعداد و شمار میں مف ما اور مف لا کافی بڑی مقداریں ہوتی ہیں اور $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی نسبت سے محدود فرقوں کے احصاء کی بنیاد

قایم ہوئی - لیکن جیسا کہ اوپر کی ہندسی اور طبیعی مثالوں سے ظاہر ہے بالعموم مف لا نہایت چھوٹی مقدار ہوگی اور لازماً مف ما بھی بہت چھوٹی مقدار ہوگی - اس لیے مف ما/مف لا دو بہت چھوٹی مقداروں کی نسبت ہے اور انتہا میں اگر مف لا اور مف ما کو لا انتہا کم صغاریہ بنا دیا جائے تو مف ما/مف لا کی انتہا سے صغاری احصا کی ابتدا ہوتی ہے - ہندسی مثال سے ظاہر ہے اگر نقطۂ ق منحنی پر حرکت کرتے ہوئے نقطۂ ن کے اس قدر قریب آجائے کہ انتہا میں نقطۂ ن پر منطبق ہو جائے تو قاطع مماس میں تبدیل ہو جاتا ہے - الجبرا کی زبان میں اس ہندسی واقعہ کو یوں بیان کرینگے کہ اگر مف لا ← ۰ تو قاطع، مماس بن جاتا ہے اور طہ وہ زاویہ ہوتا ہے جو انتہا میں مماس لا محور کے ساتھ بناتا ہے - پس مس طہ = نہا (مف لا ← ۰) مف ما/مف لا جب کبھی یہ انتہا وجود رکھتی ہے - مس طہ کو منحنی کا ڈھال بھی کہتے ہیں - اس سوال کے حل کرنے کی کوشش میں لائپزگ کے ایک مشہور فلسفی گوٹ فریڈ ولہلم لائبنٹز (۱۶۴۶ء - ۱۷۱۶ء) کو اس بات کا احساس ہوا اور انھوں نے علم احصا پر ۱۶۸۴ء میں ایک مختصر سا مضمون رسالہ (Acta Eruditoriun) میں شایع کیا - اس سے کچھ سال قبل طبیعی سوالوں میں شرح تبدیلی اور رفتار پر غور کرتے ہوئے سر آئزک نیوٹن (۱۶۴۲ء - ۱۷۲۷ء) پر علم احصا کا انکشاف بطور (Fluxion) کے ۱۶۷۰ء میں ہوا لیکن صاحب موصوف نے اس کو ۱۶۸۷ء تک شایع نہیں کیا - بعض ریاضی دانوں نے لائبنٹز پر علمی چوری کا الزام لگایا لیکن موجودہ زمانہ میں محققین کا خیال ہے کہ دونوں ریاضی دانوں نے بلا ایک دوسرے کے اثر کے علم احصا کی مختلف نقطۂ نظر سے بنیاد ڈالی - موجودہ زمانہ میں علم احصا میں مروج علامتیں لائبنٹز کی ہیں -

توضیحی مثالیں

مثال ۱ - ما = ۴ لا^۲ کے نقطہ لا = ۲ پر مف ما/مف لا کی قیمت دریافت کرو جبکہ مف لا = ± ۱، ± ۱/۲، ± ۱/۱۰، ± ۱/۵۰، ± ۰۰۱، ± ۰۰۰۱ وغیرہ

$$\text{مف ما} = ۴(\text{لا} + \text{مف لا})^۲ - ۴\,\text{لا}^۲$$

$$= ۸\,\text{لا}\,\text{مف لا} + ۴(\text{مف لا})^۲$$

اس لیے $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = ۸\,\text{لا} + ۴\,\text{مف لا}$

$$= ۱۶ + ۴\,\text{مف لا} \quad \text{جبکہ لا} = ۲$$

مف لا　　۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۱۰}$، $\frac{۱}{۵۰}$، ۰۰۱ء، ۰۰۰۱ء

$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$　　۲۰، ۱۸، ۱۶ء۴، ۱۶ء۰۸، ۱۶ء۰۰۴، ۱۶ء۰۰۰۴

مف لا　　−۱، −$\frac{۱}{۲}$، −$\frac{۱}{۱۰}$، −$\frac{۱}{۵۰}$، −۰۰۱ء، −۰۰۰۱ء

$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$　　+۱۲، +۱۴، ۱۵ء۶، ۱۵ء۹۲، ۱۵ء۹۹۶، ۱۵ء۹۹۹۶

اس سے ظاہر ہے کہ جیسے مف لا کی قیمت مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف مائل ہوتی ہے $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی قیمت ۱۶ کی طرف مائل ہوتی ہے۔

مثال ۲۔ $\text{ما} = \frac{۱}{\text{لا} + ۳}$ میں $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی قیمت دریافت کرو جبکہ لا = −۱ اور مف لا = ± ۱، ± ۰۱ء اور ± ۰۰۱ء

$$\text{مف ما} = \frac{۱}{\text{لا} + \text{مف لا} + ۳} - \frac{۱}{\text{لا} + ۳}$$

$$= \frac{(\text{لا} + ۳) - (\text{لا} + ۳ + \text{مف لا})}{(\text{لا} + ۳)(\text{لا} + ۳ + \text{مف لا})} = \frac{-\text{مف لا}}{(\text{لا} + ۳)^۲ + \text{مف لا}(\text{لا} + ۳)}$$

اس لیے $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = -\frac{۱}{(\text{لا} + ۳)^۲ + \text{مف لا}(\text{لا} + ۳)} = \frac{-۱}{(\text{لا} + ۳)^۲}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا} + ۳}\right)^{-۱}$

$$= -\frac{۱}{۴}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)^{-۱} \quad \text{جبکہ مف لا} = -۱$$

مف لا = +۱، ۰۰۱ء، ۰۰۰۰۰۱ء، −۱، −۰۰۱ء، −۰۰۰۰۰۱ء

$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = -\frac{۱}{۶}، -\frac{۱}{۴٫۰۰۲}، -\frac{۱}{۴٫۰۰۰۰۰۲}، -\frac{۱}{۲}، -\frac{۱}{۳٫۹۹۹۸}، -\frac{۱}{۳٫۹۹۹۹۹۹۸}$

اس سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی قیمت $-\frac{۱}{۴}$ کی طرف مائل ہوتی ہے جیسے مف لا صفر کی طرف مثبت یا منفی جانب سے مائل ہوتا ہے۔

مشقی سوالات ۹

(۱) ذیل کے تفاعلوں میں $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی قیمت دریافت کرو:-

(ا) ما = ۴ لا^{۲} جبکہ لا = ۱ اور مف لا = ±۱، $\pm\frac{۱}{۲}$، $\pm\frac{۱}{۱۰}$، $\pm\frac{۱}{۱۰۰۰}$

(ب) ما = (۲ لا + ۳)^{۲} جبکہ لا = −۲ اور مف لا = $\pm\frac{۳}{۲}$، $\pm\frac{۵}{۴}$، $\pm\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$

(ج) ما = جب لا جبکہ لا = $\frac{\pi}{۳}$ اور مف لا = $\pm\frac{\pi}{۹۰}$، $\pm\frac{\pi}{۱۸۰}$، $\pm\frac{\pi}{۳۶۰}$

(د) ما = مس لا جبکہ لا = $\frac{\pi}{۴}$ اور مف لا = $\pm\frac{\pi}{۳۶۰}$، $\pm\frac{\pi}{۵۴۰}$

(ہ) ما = $\frac{\text{۵ لا + ۳}}{\text{۳ لا + ۴}}$ جبکہ لا = $\frac{۳}{۵}$ اور مف لا = $\pm\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$، $\pm\frac{۳}{۱۰۰۰۰۰۰}$

(و) ما = $\frac{۱}{(\text{۲ لا + ۳})^{۲}}$ جبکہ لا = ۲ اور مف لا = $\frac{۱}{۱۰}$

(۲) ذیل کے تفاعلوں میں مف لا کی مناسب چھوٹی قیمتیں لے کر بتاؤ کہ

$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا کیا ہے:

(ا) ما = ۲ لا^{۳} + ۳ لا^{۲} جبکہ لا = ۲

(ب) ما = (۳ لا − ۲)^{۲} جبکہ لا = $\frac{۲}{۳}$

(ج) ما = $\frac{۱}{\text{۲لا} - ۱}$ جبکہ لا = ۱

(د) ما = جب ۲ لا جبکہ لا = $\frac{\pi}{۶}$

۳،۴ :- تفرقی سر — $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ یعنی $\frac{\text{ف (لا + مف لا) - ف (لا)}}{\text{مف لا}}$

کی انتہا جبکہ مف لا مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف مائل ہو بالعموم مسلسل تفاعلوں کے لیے وجود رکھتی ہے ۔ اگرچہ ایسی خاص مثالیں بتائی جا سکتی ہیں کہ مسلسل تفاعل کے کسی خاص نقطہ پر یا تمام نقطوں پر یہ انتہا وجود نہ رکھے ۔

$$\text{نہا}_{\text{مف لا} \to \pm ۰} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{مف [ف (لا)]}}{\text{مف لا}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ف (لا + مف لا) - ف (لا)}}{\text{مف لا}}$$

یا $\frac{\text{تابع متغیر کا فرق}}{\text{تبوع متغیر کا فرق}}$ کو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ یا $\frac{\text{فر [ف (لا)]}}{\text{فر لا}}$ یا فَ (لا) سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو ما یا فَ (لا) یا تابع متغیر کا بلحاظ لا یعنی تبوع متغیر کے تفرقی سر یا مشتق تفاعل کہتے ہیں ۔ انتہا سے پہلے $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ ایک نسبت ہے اور مف ما اور مف لا علیحدہ علیحدہ وجود رکھتے ہیں لیکن انتہا کے بعد $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ نسبت نہیں ہے بلکہ ایک معین مقدار ہے ۔ آیندہ فر ما اور فر لا کی بھی تعریف بطور صفاریوں کے صدر حصہ کے کی جائیگی لیکن فی الوقت فر ما اور فر لا کے کوئی معنی نہیں ہیں اس لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کو ایک واحد چیز تصور کرنا چاہیے ۔ یعنی $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ تفاعل ما پر ایک عمل کا نتیجہ ہے اور یہ عمل $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ سے تعبیر ہو سکتا ہے ۔ اس بات پر زور دینے کے لیے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ کے عمل کو عف یا $\text{عف}_{\text{لا}}$ سے بھی تعبیر کرتے ہیں ۔

پس تفرقی سر ہوگا عف ما یا $\text{عف}_{\text{لا}}$ ما یا عف [ف (لا)]

توضیحی مثالیں

مثال (۱) :- ما = ۴ لاؔ کا تفرقی سر کسی نقطہ پر دریافت کرو ۔

$$\text{مف ما} = ۴(\text{لا} + \text{مف لا})^{۲} - ۴\,\text{لا}^{۲} = ۸\,\text{لا مف لا} + ۴(\text{مف لا})^{۲}$$

$$\therefore \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = ۸\,\text{لا} + ۴\,\text{مف لا}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\left[۸\,\text{لا} + ۴\,\text{مف لا}\right] = ۸\,\text{لا}$$

اس لیے $۸\,\text{لا}$ کسی نقطہ لا پر $۴\,\text{لا}^{۲}$ کا تفرقی سر ہے۔

مثال (۲) $\text{ما} = ۳(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})^{۳}$ کا تفرقی سر دریافت کرو

$$\text{مف ما} = ۳\left[(\text{لا} + \text{مف لا})^{۲} + ۵(\text{لا} + \text{مف لا})\right]^{۳} - ۳(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})^{۳}$$

$$= ۳\left[(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا}) + \text{مف لا}(۲\,\text{لا} + ۵ + \text{مف لا})\right]^{۳} - ۳(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})^{۳}$$

$$= ۹(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})^{۲}\,\text{مف لا}(۲\,\text{لا} + ۵ + \text{مف لا}) + ۹(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})(\text{مف لا})^{۲}(۲\,\text{لا} + ۵ + \text{مف لا})^{۲} + (\text{مف لا})^{۳}(۲\,\text{لا} + ۵ + \text{مف لا})^{۳}$$

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = ۹(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})^{۲}(۲\,\text{لا} + ۵) + ۹\,\text{مف لا}(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})^{۲}(۲\,\text{لا} + ۵)$$

$$+ ۹\,\text{مف لا}(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})(۲\,\text{لا} + ۵ + \text{مف لا})^{۲} + (\text{مف لا})^{۲}(۲\,\text{لا} + ۵ + \text{مف لا})^{۳}$$

$$\text{اس لیے}\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = ۹(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})^{۲}(۲\,\text{لا} + ۵) + ۰ + ۰ + ۰$$

$$= ۹(\text{لا}^{۲} + ۵\,\text{لا})^{۲}(۲\,\text{لا} + ۵)$$

مثال (۳) $\text{لا} = \text{جب طہ}$ کا تفرقی سر $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}}$ دریافت کرو۔

$$\text{مف لا} = \text{جب}(\text{طہ} + \text{مف طہ}) - \text{جب طہ} = ۲\,\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{\text{مف طہ}}{۲}\right)\text{جب}\frac{\text{مف طہ}}{۲}$$

$$\frac{\text{مف لا}}{\text{مف طہ}} = \frac{۲\,\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{\text{مف طہ}}{۲}\right)\text{جب}\frac{\text{مف طہ}}{۲}}{\text{مف طہ}} = \text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{\text{مف طہ}}{۲}\right)\frac{\text{جب}\frac{\text{مف طہ}}{۲}}{\frac{\text{مف طہ}}{۲}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}} = \text{نہا}_{\text{مف طہ}\to ۰}\frac{\text{مف لا}}{\text{مف طہ}} = \text{نہا}_{\text{مف طہ}\to ۰}\,\text{جم}\left(\text{طہ} + \frac{\text{مف طہ}}{۲}\right)\frac{\text{جب}\frac{\text{مف طہ}}{۲}}{\frac{\text{مف طہ}}{۲}}$$

$$= \text{جم طہ}\quad \text{چونکہ}\ \text{نہا}_{\text{مف طہ}\to ۰}\frac{\text{جب}\frac{\text{مف طہ}}{۲}}{\frac{\text{مف طہ}}{۲}} \to ۱$$

(دیکھو باب اول)

مشقی سوالات ۱۰

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو :

(۱) ما = ۲ لا (۲) ما = ۳ لا^{۲} (۳) ما = لا^{۳}

(۴) ما = لا^{۲} + ۲ لا + ۳ (۵) ما = لا^{۳} - ۳ لا - ۵ (۶) ما = ۳ - ۲ لا

(۷) ما = ۱ - ۳ لا^{۴} (۸) ما = $\frac{۱}{لا}$ (۹) ما = ۲ - $\frac{۳}{لا^{۲}}$

(۱۰) ما = $\frac{۲ لا + ۳}{۳ لا - ۴}$ (۱۱) لا = جب ۲ طہ (۱۲) لا = جم ۳ طہ

(۱۳) لا = مس طہ (۱۴) لا = قط ۲ طہ

(۱۵) ما = ل لا^{۲} + ب لا + ج -

۳ ء ۵ - تکمل

:- مذکورۂ بالا دفعہ میں تفرق کرنا بتایا گیا ہے یعنی کوئی تفاعل دیا گیا ہے اور طالب علم نے اس کا تفرقی سر دریافت کیا ہے بعض سوالوں میں تفرقی سر کی قیمت دی ہوئی ہوتی ہے اور اس سے اصل تفاعل کی قیمت دریافت کرنی پڑتی ہے یعنی اگر $\frac{ف}{فرلا}$ [ف (لا)] کی قیمت معلوم ہو تو ف (لا) کی قیمت کیا ہوگی - مثلاً $\frac{لا^{۲}}{۲}$ کا تفرقی سر لا ہے اور برعکس اس کے لا تفرقی سر ہو تو تفاعل $\frac{لا^{۲}}{۲}$ ہوگا - تفرق کے اس مقلوب عمل کو "تکمل کا عمل" کہتے ہیں - پس ف (لا) کا تفرقی سر $\frac{ف}{فرلا}$ [ف (لا)] یا فَ (لا) ہوگا اور فَ (لا) تکملہ بلحاظ لا کے تفاعل ف (لا) ہوگا - علامتوں میں اس بات کو یوں ظاہر کرتے ہیں کہ ∫ فَ (لا) فرلا یعنی فَ (لا) کا تکملہ بلحاظ لا کے ف (لا) ہے

$$\therefore \int فَ (لا) فرلا = ف (لا)$$

اعلیٰ ریاضی میں تکملہ کی تعریف ریمان لیبگ وغیرہ کے مطابق ایک لا متناہی سلسلہ کے مجموعہ سے کی جاتی ہے لیکن طالب علم کی موجودہ استعداد کے لیے مناسب ہے کہ تکمل کی تعریف محض تفرق کے مقلوب عمل کی طرح کی جائے -
تفرق کی مثالوں میں بتایا گیا ہے کہ ایک مستقل کا تفرقی سر صفر ہے

یعنی ف (لا) + مستقل کا تفرقی سر فَ (لا) ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\text{ف (لا)} + \text{مستقل}\right] = \text{فَ (لا)}$$

اس لیے منقلوب عمل کرنے سے حاصل ہوگا ∫ فَ (لا) فرلا = ف (لا) + م

جہاں م کوئی مستقل ہے ۔ اس سے ظاہر ہے کہ تفرق کے عمل سے واحد نتیجہ ملتا ہے لیکن تکمل کے عمل کے بعد حاصل تکمل میں ایک اختیاری مستقل موجود ہے اور اکثر سوالوں میں اس مستقل کی قیمت ابتدائی شرائط سے دریافت کی جاتی ہے۔ اس مستقل کی موجودگی کی وجہ سے اس تکمل کو غیر معین تکملہ بھی کہتے ہیں ۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) ∫ لا۳ فرلا کی قیمت دریافت کرو ۔

ہمیں معلوم ہے کہ لا۴ کا تفرقی سر ۴ لا۳ ہے اس لیے $\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}$ کا تفرقی سر لا۳ ہوگا ۔

پس ∫ لا۳ فرلا = $\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}$ + م

مثال (۲) ∫ جم ۲ لا فرلا کی قیمت دریافت کرو ۔

ہمیں گزشتہ دفعہ کی مثالوں سے معلوم ہے کہ جب ۲ لا کا تفرقی سر بلحاظ لا کے ۲ جم ۲ لا ہے

اس لیے ∫ جم ۲ لا فرلا = $\frac{\text{جب ۲ لا}}{۲}$ + م

مشقی سوالات ۱۱

ذیل کی قیمت دریافت کرو :

(۱) ∫ لا۲ فرلا (۲) ∫ (۳ لا + ۲) فرلا (۳) ∫ (۲ لا۲ ـ ۳ لا) فرلا

(۴) ∫ (۲ لا ـ ۱) فرلا (۵) ∫ جب لا فرلا (۶) ∫ جم لا فرلا

(۷) $\int \frac{1}{\text{جم}^2 \text{لا}}$ فرلا (۸) $\int \frac{1}{\text{قطا}^2 \text{لا}}$ فرلا (۹) $\int \left(2 - \frac{3}{\text{لا}^2}\right)$ فرلا

(۱۰) $\int \left(3\,\text{لا} + \frac{7}{\text{لا}^2} - 1\right)$ فرلا (۱۱) $\int$ (جب ۲ لا ـ جم ۳ لا) فرلا

۳۶ ۶ - تفرق اور تکمل کی معیاری شکلیں :-

دفعہ ۳۴ میں ابتدائی اصولوں سے تفرق کرنا بتایا گیا ہے۔ لیکن ہر سوال میں اس عمل کے کرنے میں بہت طول ہوگا اور اس لیے چند ایسے تفاعلوں کا جو اکثر استعمال ہوتے ہیں ابتدائی اصولوں سے تفرقی سر نکال لیا جاتا ہے اور ان نتیجوں کو باقی سوالوں میں تفرقی سر نکالنے کے لیے بطور ضابطے کے استعمال کیا جاتا ہے۔ موجودہ تعریف کے مطابق تکمل کا عمل مقلوب عمل ہے اور اس لیے ابتدائی اصولوں سے تکمل نہیں نکالا جاسکتا۔ اس میں بہت ضروری ہے کہ چند اہم صورتوں میں تکمل کی قیمت نکال لی جائے اور انہیں بطور معیاری شکلوں کے استعمال کیا جائے۔ اب ہم تفرق اور ساتھ ساتھ تکمل کی چند معیاری شکلیں حاصل کریںگے۔

۳۶ ۶ ۱ :- ما = $\text{لا}^{\text{ن}}$ جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\text{مف ما} = (\text{لا} + \text{مف لا})^{\text{ن}} - \text{لا}^{\text{ن}}$$

اسے مسئلہ ثنائی سے پھیلاؤ

$$= \text{ن} \times \text{لا}^{\text{ن}-1} \times \text{مف لا} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2} \text{لا}^{\text{ن}-2} (\text{مف لا})^2 + \dots + (\text{مف لا})^{\text{ن}}$$

$$\therefore \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ن لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2} \text{لا}^{\text{ن}-2} \text{مف لا} + \dots + (\text{مف لا})^{\text{ن}-1}$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \left[\text{ن لا}^{\text{ن}-1} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{\lfloor 2} \text{لا}^{\text{ن}-2} \text{مف لا} + \dots + (\text{مف لا})^{\text{ن}-1} \right]$$

$$= \text{ن لا}^{\text{ن}-1}$$

یہ ضابطہ ن کی کسری یا منفی قیمت کے لیے بھی درست ہے جس کا ثبوت دفعہ ۳۴ ۶ ۲ کے نتیجۂ صریح سے فوراً حاصل ہوتا ہے اگر ہم ھ کی بجائے مف لا درج کریں۔

اب ہم تین ذیلی ضابطے بیان کرتے ہیں جن کا ثبوت بہت آسان ہے اور طالب علم کے لیے بطور مشق کے چھوڑ دیتے ہیں۔

$$\frac{فر}{فرلا}(مستقل) = ۰$$

اور $\frac{فر}{فرلا}\left[م ف(لا)\right] = م \frac{فر}{فرلا}\left[ف(لا)\right] = م ف'(لا)$

اور $\frac{فر}{فرلا}\left[ف_۱(لا) + ف_۲(لا) + \dots\right] = \frac{فر}{فرلا}\left[ف_۱(لا)\right] + \frac{فر}{فرلا}\left[ف_۲(لا)\right] + \dots$

یہ ضابطے سوالات میں بہت استعمال ہونگے۔

اسی طرح $\frac{فر}{فرلا}(لا^{ن+۱}) = (ن+۱)لا^{ن}$ یعنی $\frac{فر}{فرلا}\left[\frac{لا^{ن+۱}}{ن+۱}\right] = لا^{ن}$

اور مقلوب عمل سے $\int لا^{ن} فرلا = \frac{لا^{ن+۱}}{ن+۱} + مستقل$

اگر ن = -۱ تو یہ ضابطہ درست نہیں رہتا کیونکہ $\frac{فر}{فرلا}\left(\frac{لا^۰}{۰}\right)$ کے کوئی معنی نہیں ہیں۔ $\int \frac{فرلا}{لا}$ کی قیمت بعد میں نکالی جائیگی۔

نیز ذیلی ضابطوں کے مقلوب عمل سے حاصل ہوگا $\int م ف(لا) فرلا = م \int ف(لا) فرلا$

اور $\int \left[ف_۱(لا) + ف_۲(لا) + \dots\right] فرلا = \int ف_۱(لا) فرلا + \int ف_۲(لا) فرلا + \dots$

مشقی سوالات ۱۲

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو۔ ضابطوں کا استعمال کیا جائے۔

(۱) $۲لا + ۳$ (۲) $۲لا^۲ + ۳لا - ۵$ (۳) $۴لا - ۵لا^۲ + \frac{۸}{لا}$

(۴) $۵ص^۳ + \frac{۶}{ص^۳}$ (۵) $ی^۵ - ۰۵ی$ (۶) $ا لا^۲ + ۲ب لا + ج$

(۷) $۳لا^{\frac{۲}{۳}} + ۲لا^{\frac{۳}{۲}}$ (۸) $\frac{۵}{\sqrt{۲لا^۲}}$ (۹) $۴\sqrt{لا^{\frac{۲}{۳}}}$

(۱۰) $\frac{۳}{\sqrt{لا^{۳}}}$ (۱۱) $۵ ا^{\frac{۱}{۲}} + ۶$ (۱۲) $\frac{ا + ب ت + ج ت^{۲}}{\sqrt{ت}}$

(۱۳) $۱۲ ی^{\frac{۳}{۴}} + ۶ + ۱۲ ی^{-\frac{۳}{۴}}$ (۱۴) $\frac{ا + ب ت + ج ت^{۲}}{ت^{۳}}$

ذیل کے تفاعلوں کے تکملے ضابطے کی مدد سے لکھو:-

(۱۵) $\int ۵ لا^{۲}\, فرلا$ (۱۶) $\int (۳ لا + ۵ لا^{۳} - ۷)\, فرلا$ (۱۷) $\int (۲ لا^{۲} - \frac{۱}{لا^{۲}})\, فرلا$

(۱۸) $\int (ص + ۲)^{۲}\, فرص$ (۱۹) $\int (۲ ی + \frac{۳}{ی^{۲}})\, فری$

(۲۰) $\int (ا لا + ب)^{۳}\, فرلا$ (۲۱) $\int \sqrt[۳]{۲ لا^{۲}}\, فرلا$

(۲۲) $\int (۴ لا^{\frac{۳}{۴}} + ۵ لا^{\frac{۴}{۳}})\, فرلا$ (۲۳) $\int \sqrt{ا ت^{\frac{۲}{۳}}}\, فرت$

(۲۴) $\int \frac{ا + ب ت + ج ت^{۲}}{\sqrt{ت}}\, فرت$ (۲۵) $\int (۴ ی^{\frac{۳}{۴}} - ۳ + ۶ ی^{-\frac{۲}{۴}})\, فری$

(۲۶) $\int \frac{فرو}{۵\sqrt{۳ و^{\frac{۲}{۳}}}}$

۶۲ ء ۳ :- تفاعل کا تفاعل :-

فرض کرو کہ ما = فہ (و) جہاں و = ف (لا) اور ما کا تفرقی سر بلحاظ لا کے مطلوب ہے۔ ایک طریقہ تو یہ ہوگا کہ و کی قیمت ف (لا) کو فہ (و) میں درج کر دیا جائے۔ اس طرح ما بلا راست لا کا تفاعل ہو جاتا ہے اور اس کو تفرق کرنے سے $\frac{فر ما}{فر لا}$ حاصل ہو جائیگا۔ لیکن اکثر سوالات میں یہ عمل مشکل ہوگا اور اس لیے ما کا تفرقی سر بلحاظ لا کے بتوسط و دریافت کیا جائیگا۔

$ما + مف ما = فہ(و + مف و)$ اور $و + مف و = ف(لا + مف لا)$

اب $\frac{مف ما}{مف لا} = \frac{فہ(و + مف و) - فہ(و)}{مف لا} = \frac{فہ(و + مف و) - فہ(و)}{مف و} \times \frac{مف و}{مف لا}$

$= \frac{فہ(و + مف و) - فہ(و)}{مف و} \times \frac{ف(لا + مف لا) - ف(لا)}{مف لا}$

انتہا کے باب میں ثابت کیا گیا ہے کہ حاصل ضرب کی انتہا اجزاء کی انتہاؤں کے

حاصلِ ضرب کے مساوی ہوتی ہے۔

اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$

$= \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{فہ}(\text{و} + \text{مف و}) - \text{فہ}(\text{و})}{\text{مف و}} \times \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{ف}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{ف}(\text{لا})}{\text{مف لا}}$

اب اگر مف لا ← ۰، تو لازمی طور پر مف و ← ۰۔

اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرو}}[\text{فہ}(\text{و})] \times \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}[\text{ف}(\text{لا})] = \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} \times \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$

اسی طرح اگر $\text{ما} = \text{ف}(\text{و})$ اور $\text{و} = \text{فہ}(\text{ی})$ اور $\text{ی} = \text{فا}(\text{لا})$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} \times \frac{\text{فرو}}{\text{فری}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$

تکمل کی صورت میں $\int \text{ف}(\text{و}) \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} \text{فرلا} = \int \text{ف}(\text{و}) \text{فرو}$

توضیحی مثالیں

مثال (۱) $\text{ما} = (۴\text{لا}^۳ + ۳\text{لا} - ۵)^۴$ سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت دریافت کرو۔
اس میں بائیں جانب کے جملہ کو پھیلایا جا سکتا ہے اور پھر پہلی معیاری شکل سے تفرق کیا جا سکتا ہے۔ لیکن ظاہر ہے کہ یہ طریقہ بہت لمبا ہے۔ اس لیے فرض کرو کہ $۴\text{لا}^۳ + ۳\text{لا} - ۵ = \text{ص}$

پس $\text{ما} = \text{ص}^۴$ اور $\text{ص} = ۴\text{لا}^۳ + ۳\text{لا} - ۵$

اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرص}} \times \frac{\text{فرص}}{\text{فرلا}} = ۴\text{ص}^۳ \times (۱۲\text{لا}^۲ + ۳)$

$= ۴(۴\text{لا}^۳ + ۳\text{لا} - ۵)^۳ (۱۲\text{لا}^۲ + ۳)$

مثال (۲) $\int ۲\text{لا}(\text{لا}^۲ + ۵)^۲ \text{فرلا}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس تکمل میں بھی تکملہ $\text{۲لا}(\text{لا}^{۲} + ۵)^{۴}$ کو لا کی قوتوں میں پھیلایا جا سکتا ہے ۔ اور پھر ضابطہ سے تکمل کیا جا سکتا ہے ۔ لیکن اس دفعہ کے استعمال سے عمل میں بہت سہولت ہوگی ۔

فرض کرو کہ $\text{لا}^{۲} + ۵ = \text{ص}$ اس لیے $\frac{\text{فص}}{\text{فلا}} = \text{۲لا}$

$$\int \text{۲لا}(\text{لا}^{۲} + ۵)^{۴}\,\text{فلا} = \int \text{ص}^{۴} \frac{\text{فص}}{\text{فلا}}\,\text{فلا} = \int \text{ص}^{۴}\,\text{فص} = \frac{\text{ص}^{۵}}{۵} + \text{مستقل}$$

$$= \frac{۱}{۵}(\text{لا}^{۲} + ۵)^{۵} + \text{مستقل}$$

مشقی سوالات ۱۳

ذیل کے تفاعلوں کے تفرقی سر دریافت کرو ۔

(۱) $(\text{۲لا} + ۱)^{۴}$ (۲) $(\text{لا}^{۲} + \text{۳لا} + ۵)^{۳}$ (۳) $(\text{۲لا}^{۳} - \text{۳لا} + ۷)^{۲}$

(۴) $(\text{۵ی}^{۲} - \text{۳ی} - ۲)^{۴}$ (۵) $(\text{ط}^{۳} - \text{۲ط})^{۴}$ (۶) $(\text{۳لا} - ۱)^{۳} - \frac{۴}{(\text{لا} + ۷)^{۳}}$

(۷) $(\text{۲ی} - ۱)^{-۳}$ (۸) $\frac{۵}{(\text{لا}^{۲} - \text{۳لا} - ۳)^{۴}}$ (۹) $(\text{۵لا}^{۲} - ۲)^{۹} + \frac{۴}{(\text{۲لا}^{۳} + \text{۴لا} - ۳)^{۴}}$

(۱۰) $\text{ط} = \text{۵و}^{۳} - \text{۳و} + ۱$ اور $\text{و} = (\text{۲لا} - ۱)^{۳}$

(۱۱) $\text{م} = \text{۳ص}^{۲} + \text{۲ص} - \frac{۱}{\text{ص}}$ اور $\text{ص} = \text{۲لا} - \frac{۱}{(\text{لا}^{۲} + ۵)^{۳}}$

(۱۲) $\text{لا}^{۳} \times \sqrt{۲ - \text{لا}}$ (۱۳) $\sqrt[۳]{\text{۲لا}} + ۵\sqrt{\text{۴لا}^{۲} + ۵}$ (۱۴) $\sqrt{۱۰ - \text{۲لا}}$

(۱۵) $\sqrt[۳]{\text{لا}^{۲} - \text{۲لا} + ۳}$ (۱۶) $\text{ت}^{۲}\sqrt[۳]{\text{۶ت} - ۱}$

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو : ۔

(۱۷) $\int (\text{۲لا} - ۱)^{۳}\,\text{فلا}$ (۱۸) $\int (\text{۴لا} + ۳)^{۲}\,\text{فلا}$ (۱۹) $\int (\text{۳لا} - ۲)^{۲۰}\,\text{فلا}$

(۲۰) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{۵لا}+۱)^{۲}}$ (۲۱) $\int \left[\text{۲لا} + ۳ - \frac{۴}{(\text{لا}+۱)^{۲}}\right] \text{فرلا}$

(۲۲) $\int \left[\text{۵لا}^{۳} - \text{۷لا} + ۱ + \frac{۲}{(\text{۳لا}-۱)^{۲}} + \frac{۴}{\text{لا}^{۴}}\right] \text{فرلا}$

(۲۳) $\int (\text{۴لا}^{۳} - \text{۷لا} + ۱)^{۴} (\text{۱۲لا}^{۲} - ۷)\, \text{فرلا}$

(۲۴) $\int (\text{۵لا}^{۲} - \text{۴لا} + ۲)^{۳} (\text{۵لا} - ۲)\, \text{فرلا}$

(۲۵) $\int \sqrt[۳]{۲-\text{لا}}\, \text{فرلا}$ (۲۶) $\int \left(\text{ا}^{\frac{۲}{۳}} - \text{لا}^{\frac{۲}{۳}}\right) \text{فرلا}$

(۲۷) $\int (\text{۶و} - ۱)^{\frac{۱}{۳}}\, \text{فرو}$ (۲۸) $\int \sqrt[۵]{۲-\text{۳ت}}\, \text{فرت}$

۶۳ء۳ - مثلثی تفاعلوں کا تفرقی سر:-

(ا) جب لا کا تفرقی سر:-

فرض کرو کہ ما = جب لا

تو مف ما = جب (لا + مف لا) - جب لا

$$= ۲\,\text{جم}\,\frac{\text{۲لا}+\text{مف لا}}{۲}\;\text{جب}\,\frac{\text{مف لا}}{۲}$$

$$\therefore \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\text{جب}\,\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\, \text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right) \frac{\text{جب}\,\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\, \text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right) \times \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰} \frac{\text{جب}\,\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}$$

$$= \text{جم لا}$$

مقلوب عمل سے $\int \text{جم لا فرلا} = \text{جب لا} + \text{مستقل}$

(ب) جم لا کا تفرقی سر:-

ما = جم لا تو مف ما = جم (لا + مف لا) - جم لا

$$= ۲\ \text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\text{جب}\left(-\frac{\text{مف لا}}{۲}\right)$$

$$= -۲\ \text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\text{جب}\ \frac{\text{مف لا}}{۲}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\left[-\frac{\text{جب}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right)\text{جب}\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}\right]$$

$$= -\text{جب لا}$$

اور منقلوب عمل سے $\int \text{جب لا فر لا} = -\text{جم لا} + \text{مستقل}$

(ج) مس لا کا تفرقی سر:-

فرض کرو ما = مس لا

تو مف ما = مس (لا + مف لا) - مس لا

$$= \frac{\text{جب}(\text{لا} + \text{مف لا})}{\text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا})} - \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$$

$$= \frac{\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})\text{جم لا} - \text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})\text{جب لا}}{\text{جم لا جم}(\text{لا} + \text{مف لا})} = \frac{\text{جب مف لا}}{\text{جم لا جم}(\text{لا}+\text{مف لا})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \frac{\text{جب مف لا}}{\text{مف لا}} \times \frac{۱}{\text{جم لا}} \times \frac{۱}{\text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا})}$$

$$= \frac{۱}{\text{جم لا} \times \text{جم لا}} = \text{قط}^۲\ \text{لا}$$

منقلوب عمل سے $\int \text{قط}^۲\ \text{لا فر لا} = \text{مس لا} + \text{مستقل}$

(د) حم لا کا تفرقی سر:-

فرض کرو کہ ما = حم لا

$$\text{تو}\quad \text{مف ما} = \text{حم}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{حم لا}$$

$$= \frac{\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})\,\text{جب لا} - \text{جم لا}\,\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})}{\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})\,\text{جب لا}}$$

$$= \frac{\text{جب}(-\text{مف لا})}{\text{جب لا}\,\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})} = \frac{-\text{جب مف لا}}{\text{جب لا}\,\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \frac{-\text{جب مف لا}}{\text{مف لا}} \times \frac{۱}{\text{جب لا}} \times \frac{۱}{\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})}$$

$$= -\frac{۱}{\text{جب}^{۲}\,\text{لا}} = -\text{قم}^{۲}\,\text{لا}$$

$$\text{مقلوب عمل سے}\quad \int \text{قم}^{۲}\,\text{لا فر لا} = -\text{حم لا} + \text{مستقل}$$

(ھ) قط لا کا تفرقی سر :-

$$\text{ما} = \text{قط لا}$$

$$\text{تو مف ما} = \text{قط}(\text{لا}+\text{مف لا}) - \text{قط لا}$$

$$= \frac{\text{جم لا} - \text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})}{\text{جم لا}\,\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})} = \frac{۲\,\text{جب}(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{۲})\,\text{جب}\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\text{جم لا}\,\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\ \frac{\text{جب}\frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}} \times \frac{\text{جب}(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{۲})}{\text{جم لا}\,\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})}$$

$$= \frac{\text{جب لا}}{\text{جم}^{۲}\,\text{لا}} = \text{مس لا قط لا}$$

$$\text{اور مقلوب عمل سے}\quad \int \text{مس لا قط لا فر لا} = \text{قط لا} + \text{مستقل}$$

(و) قم لا کا تفرقی سر :-

$$\text{ما} = \text{قم لا}$$

$$\text{تو مف ما} = \text{قم}(\text{لا}+\text{مف لا}) - \text{قم لا}$$

$$= \frac{\text{جب لا} - \text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})}{\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})\,\text{جب لا}} = \frac{۲\,\text{جم}(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{۲})\,\text{جب}(-\frac{\text{مف لا}}{۲})}{\text{جب}(\text{لا}+\text{مف لا})\,\text{جب لا}}$$

∴ فرما / فرلا = نہا مف لا ← ۰ مف ما / مف لا = نہا مف لا ← ۰ (-جب (مف لا / ۲) / (مف لا / ۲)) جم (لا + مف لا / ۲) / (جب لا جب (لا + مف لا))

= - جم لا / جب^۲ لا = - مم لا قم لا

اور مقلوب عمل سے ∫ مم لا قم لا فرلا = - قم لا + مستقل

توضیحی مثالیں

مثال (۱) ما = جم (۲ لا + ۳) کا تفرقی سر دریافت کرو۔

فرض کرو ۲ لا + ۳ = طہ ∴ ما = جم طہ

فرما / فرلا = فرما / فرطہ × فرطہ / فرلا = - جب طہ × ۲ = - ۲ جب (۲ لا + ۳)

مثال (۲) مس [جب^۲ (۳ لا - ۱)] کا مشتق تفاعل بلحاظ لا دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ما = مس [جب^۲ (۳ لا - ۱)]

اور ی = جب^۲ (۳ لا - ۱)

۳ لا - ۱ = ٨ ∴ ما = مس ی اور ی = جب^۲ ٨

فرما / فرلا = فرما / فری × فری / فر٨ × فر٨ / فرلا = قط^۲ ی × ۲ جب ٨ جم ٨ × ۳

= ۶ قط^۲ [جب^۲ (۳ لا - ۱)] × جب (۳ لا - ۱) جم (۳ لا - ۱)

مثال (۳) ∫ ۳ جب^۲ (۳ لا + ۲) جم (۳ لا + ۲) فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ جب (۳ لا + ۲) = ی

۳ لا + ۲ = ٨ ∴ ی = جب ٨

∴ ∫ ۳ جب^۲ (۳ لا + ۲) جم (۳ لا + ۲) فرلا = ∫ ۳ ی^۲ فری / فر٨ × فرلا

= ∫ ی^۲ فری / فر٨ × فر٨ / فرلا × فرلا = ∫ ی^۲ فری

= ۱/۳ ی^۳ + مستقل = ۱/۳ جب^۳ (۳لا + ۲) + مستقل

مشقی سوالات ۱۴

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو :-

(۱) جم^۲ (۲ط + ۳) (۲) جب^۳ (۳/ط)

(۳) جب (۲ط - ۳) + مس^۲ ط

(۴) جب ط جم ط (۵) جب (۲ط - ۳) جم (ط) (۶) قم (۲ط)

(۷) قط^۲ (ط - ۴) (۸) مس (۲لا + ۱) - مم^۳ (لا + ۱) (۹) ۱ / قط (۲لا + ۱) قم (لا - ۲)

(۱۰) قط^۳ (۲لا^۲ - ۳لا + ۴) + قم^۲ (۵لا)

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-

(۱۱) ∫ جب (۲لا + ۳) فرلا (۱۲) ∫ جم (لا - ۱) فرلا (۱۳) قط^۲ (۴لا - ۱) فرلا

(۱۴) ∫ جب^۲ ط فرط [نوٹ :- پہلے جب^۲ ط کو ۲ط کی مثلثی نسبت میں بیان کرو]

(۱۵) ∫ جب (۲ط + ۳) جم (۳ - ۲ط) فرط (۱۶) قم^۲ (۲ط) فرط

۳۶۴ :- تفاعلوں کے حاصلِ ضرب اور حاصلِ تقسیم کو تفرق کرنا :-

(ا) دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا تفرقی سرا :-

فرض کرو کہ ا = د × و جہاں د اور و متغیر لا کے تفاعل ہیں۔ اگر لا میں مف لا کا اضافہ کیا جائے تو ا، د اور و کے اضافوں میں ذیل کا رشتہ ہوگا۔

$$\text{مف ما} = (\text{ی} + \text{مف ی})(\text{و} + \text{مف و}) - \text{ی و} = \text{ی مف و} + \text{و مف ی} + \text{مف ی} \times \text{مف و}$$

اس لیے
$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \left[\frac{\text{ی مف و}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{و مف ی}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{مف ی} \times \text{مف و}}{\text{مف لا}}\right]$$

$$= \text{ی}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{و}\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ما}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}} + \frac{\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}}{\text{ی}}$$

اسی طرح اگر ی_1، ی_2 ..... $\text{ی}_{\text{ن}}$ متغیر لا کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{1}{\text{ی}_1 \times \text{ی}_2 \times \ldots \times \text{ی}_{\text{ن}}} \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} (\text{ی}_1 \times \text{ی}_2 \times \ldots \times \text{ی}_{\text{ن}}) = \frac{\frac{\text{فر ی}_1}{\text{فر لا}}}{\text{ی}_1} + \frac{\frac{\text{فر ی}_2}{\text{فر لا}}}{\text{ی}_2} + \ldots + \frac{\frac{\text{فر ی}_{\text{ن}}}{\text{فر لا}}}{\text{ی}_{\text{ن}}}$$

الفاظ میں اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ حاصل ضرب کا تفرقی سر مساوی ہے تفاعل ضرب ایسا مجموعہ جس کی رقمیں ہر جزو کے تفرقی سر کو اس جزو پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

اگر اس میں ہر جزو کو لا کے مساوی رکھا جائے تو $\frac{1}{\text{لا}^{\text{ن}}} \frac{\text{فر}(\text{لا}^{\text{ن}})}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ن}}{\text{لا}}$

یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{لا}^{\text{ن}}) = \text{ن لا}^{\text{ن}-1}$ جب ن مثبت صحیح عدد ہے اور یہ $\text{لا}^{\text{ن}}$ کے تفرقی سر حاصل کرنے کے ضابطہ کا دوسرا ثبوت ہے۔

(ب) دو تفاعلوں کے حاصلِ تقسیم کا تفرقی سر:-

فرض کرو کہ $\text{ما} = \frac{\text{ی}}{\text{و}}$ جہاں ی اور و متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

اس لیے
$$\text{مف ما} = \frac{\text{ی} + \text{مف ی}}{\text{و} + \text{مف و}} - \frac{\text{ی}}{\text{و}} = \frac{\text{و مف ی} - \text{ی مف و}}{\text{و}(\text{و} + \text{مف و})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{و}\frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} - \text{ی}\frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}}{\text{و}^2 + \text{و مف و}}$$

$$\frac{\text{و}\,\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}} - \text{د}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{2}}$$

الفاظ میں یہ ضابطہ اس طرح بیان ہو سکتا ہے کہ کسی کسر کے تفرقی سر کا نسب نما ابتدائی کسر کے نسب نما کا مربع ہوگا اور شمار کنندہ نسب نما ضرب شمار کنندہ کا تفرقی سر منفی شمار کنندہ ضرب نسب نما کا تفرقی سر ہوگا۔

اس ضابطہ کو حاصل ضرب کے ضابطے کی مدد سے بھی نکالا جا سکتا ہے۔

$$\text{ما} = \text{د} \times \frac{1}{\text{و}} = \text{د} \times \text{و}^{-1}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{د} \times \text{و}^{-1} \left[\frac{\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}}{\text{د}} + \frac{\frac{\text{فر}(\text{و}^{-1})}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{-1}} \right]$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{و}} \left[\frac{\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}}{\text{د}} + \frac{(-1) \times \text{و}^{-2}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{-1}} \right]$$

$$= \frac{\text{د}}{\text{و}} \left[\frac{\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}}{\text{د}} - \frac{\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}} \right]$$

$$= \frac{\text{و}\,\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}} - \text{د}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^{2}} \quad \text{حسب سابق}$$

ضابطہ $\frac{\text{فر(د و)}}{\text{فر لا}} = \text{د}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{و}\,\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}$ پر مقلوب عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$\text{د و} = \int \text{د فر و} + \int \text{و فر د}$ اس سے تکمل بالحصص کا ضابطہ اخذ ہوتا ہے جس کی تکمل میں بہت اہمیت ہے اور اسے تکمل کے باب میں وضاحت سے بتایا جائیگا۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) — اگر $\text{ما} = \text{لا}^{2}$ جب لا تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ دریافت کرو۔

$$\frac{\text{ف}\,\text{ا}}{\text{ف}\,\text{لا}} = \frac{\text{ف}(\text{لا}^{۲})}{\text{ف}\,\text{لا}} \times \text{جب}\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}\,\frac{\text{ف}(\text{جب}\,\text{لا})}{\text{ف}\,\text{لا}}$$

$$= ۲\,\text{لا}\,\text{جب}\,\text{لا} + \text{لا}^{۲}\,\text{جم}\,\text{لا}$$

مثال (۲) ـــ $\text{ا} = \frac{\text{لا}^{۲} + ۳}{(۱ + \text{لا}^{۳})}$ کو تفرق کرو۔

$$\text{عف}\,\text{ا} = \frac{(۱ + \text{لا}^{۳})\frac{\text{ف}}{\text{ف}\,\text{لا}}(\text{لا}^{۲} + ۳) - (\text{لا}^{۲} + ۳)\frac{\text{ف}}{\text{ف}\,\text{لا}}(۱ + \text{لا}^{۳})}{(۱ + \text{لا}^{۳})^{۲}}$$

$$= \frac{۲\,\text{لا}(۱ + \text{لا}^{۳}) - ۳\,\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۲} + ۳)}{(۱ + \text{لا}^{۳})^{۲}} = \frac{۲\,\text{لا} - ۹\,\text{لا}^{۲} - \text{لا}^{۴}}{(۱ + \text{لا}^{۳})^{۲}}$$

مشقی سوالات ۱۵

ذیل کو تفرق کرو:-

(۱) $\text{لا}^{۲}(\text{لا}^{۳} + ۱)^{۲}$ (۲) $\text{لا}^{-۳}(۲\,\text{لا} + ۳)^{۵}$ (۳) $\frac{(۳\,\text{لا}^{۲} + ۱)}{۶\,\text{لا} + ۳}$

(۴) $\frac{۴\,\text{لا} - ۳}{۲\,\text{لا} + ۱} \times \text{جم}\,\text{لا}$ (۵) $\frac{\text{جب}^{۲}\,\text{لا} + ۱}{۲\,\text{مس}\,\text{لا} + ۳}$ (۶) $\text{جب}\,\text{ط}\,\text{مس}(۲\,\text{ط} + \text{ع})$

(۷) $\text{جب}(\text{ط} + \text{ع})\,\text{جم}(\text{ط} - \text{ع})$ (۸) $\frac{(\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب})^{۲}}{\text{ج}\,\text{لا} + \text{د}}\,\text{جب}(\text{لا} + \text{ع})$

(۹) $\frac{۵\,\text{لا} + ۱}{۷\,\text{لا}^{۲} + ۸\,\text{لا} - ۵}$ (۱۰) $\frac{(۲\,\text{لا} - ۱)^{۴}(۵\,\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} - ۲)^{۲}}{(۸\,\text{لا}^{۲} + ۳)^{۳}(۳\,\text{لا} + ۲)^{۲}}$

(۱۱) $\frac{\text{قط}(۲\,\text{ط})\,\text{مس}\,۳\,\text{ط}}{\text{جب}(۴\,\text{ط} + ۵)}$ (۱۲) $\frac{\text{قم}\,\text{ف}\,\text{م}(۲\,\text{ف} - ۱)\,\text{قط}(۳\,\text{ف})}{\text{ف} + ۲}$

۳٫۶۵:- تضمینی (Implicit) تفاعل کو تفرق کرنا۔

تفاعل کی تعریف میں بتلایا گیا ہے کہ دو متغیروں میں کسی رشتہ کو تفاعل کہتے ہیں اور ان میں سے کسی ایک متغیر کو متبوع متغیر اور دوسرے کو تابع متغیر فرض کرو کہ ف (لا ، ما) = ۰ کوئی تفاعل ہے۔ اس میں لا یا ما کو متبوع متغیر فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن بالعموم اگر ان میں سے کوئی ایک متغیر دوسرے متغیر کی رقوم میں تصریحی طور پر بیان ہو سکتا ہے تو اول الذکر کو تابع متغیر اور موخرالذکر کو متبوع متغیر کہتے ہیں۔

بعض دفعہ دونوں ایک دوسرے کی رقوم میں صریح طور پر بیان ہو سکتے اور بعض دفعہ کوئی بھی نہیں۔ صریح طور پر بیان ہونے والی صورت میں تفرقی سہر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ یا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ ہوگا لیکن ان دونوں مشتقوں میں بہت سادہ رشتہ ہے اور اس سے بہت سارے سوالات میں بے حد سہولت ہوتی ہے۔

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to} \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}}$$

اب اگر مف لا ← تو لازماً مف ما ← ۔

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{نہا}_{\text{مف ما} \to} \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}} = \frac{1}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = 1$$

لیکن اگر ف (لا ، ما) = ۰ کو صریح طور پر کسی متغیر کی رقوم میں نہیں بیان کیا جا سکتا ہے تو ف (لا ، ما) کی ہر رقم کو بلحاظ لا تفرق کر لو اور اس سے جو جملہ بنتا ہے اس کو صفر کے مساوی رکھو یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ [ف (لا ، ما)] = ۰ اس کو حل کرنے سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ یا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ کے لیے جملہ حاصل ہوگا اور اس میں بالعموم دونوں متغیر موجود ہونگے۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) - اگر ما = جب$^{-1}$ لا تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔

∴ $\text{لا} = \text{جب ما}$ اور $\dfrac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{جم ما}$

∴ $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{جم ما}} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$$

مثال (۲) $\text{ل لا}^2 + 2\text{ھ لا ما} + \text{ب ما}^2 + \text{ج} = 0$ سے $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس مساوات کو لا یا ما کے لیے حل کر سکتے ہیں اور پھر تفرق کر سکتے ہیں۔ لیکن حل میں جذر موجود ہوگا جس کی وجہ سے تفرق میں ذرا مشکل ہوگی۔ اس لیے جملہ کو راست تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$2\text{ل لا} + 2\text{ھ ما} + 2\text{ھ لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + 2\text{ب ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$$

∴ $$2(\text{ھ لا} + \text{ب ما})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -2(\text{ل لا} + \text{ھ ما})$$

∴ $$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ل لا} + \text{ھ ما}}{\text{ھ لا} + \text{ب ما}}$$

مشقی سوالات ۱۶

ذیل میں $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت معلوم کرو:-

(۱) $\text{لا} + 3\text{ما}^2 + 2\text{لا ما} + 4\text{ما} + 1 = 0$

(۲) $\text{لا} = 7\text{ما}^3 - 8\text{ما}^2 + 1$ (۳) $\text{لا} = \text{قم}(2\text{ما} + 3)$

(۴) $\text{ھ} = \dfrac{4\text{ما}^3 + 3\text{ما}}{2\text{ما}^2 - 1} \times \text{لا}$ (۵) $\text{حس}(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) = \text{لا ما}$

(۶) $\text{قط}\dfrac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{لا}^2$ (۷) $\text{لا} + \sqrt{\text{لا ما}} + \text{ما} = \text{ل}$

(۸) $\frac{\text{لا}}{\text{ما}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{ج}$　　(۹) $\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲} - \text{لا}^{۴} - ۲\,\text{ما}^{۴} = ۶$

(۱۰) $\text{لا}^{۳} + \text{ما}^{۳} - ۳\,\text{لا ما} + \text{ل} = ۰$

ذیل کے منحنیوں کے ڈھال دیے ہوئے نقطوں پر معلوم کرو:—

(۱۱) $\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا ما} + \text{ما}^{۲} + ۱ = ۰$ کے نقطہ (۲، −۱) پر

(۱۲) $\text{لا}^{۲} - \text{ل لا ما} + ۲\,\text{ل ما}^{۲} = ۲\,\text{ل}^{۳}$ کے نقطہ (ل، ل) پر

(۱۳) $\text{لا}^{۲} = ۱۶\,\text{ما} - \text{ما}^{۳}$ کے نقطہ (−۲، ۲) پر

(۱۴) $۳\sqrt{۲\,\text{لا}} - \text{ما}^{\frac{۱}{۳}} = ۱$ کے نقطہ (۴، ۱) پر

(۱۵) منحنی $\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} = ۲۵$ کے نقاط (−۳، ۴)، (۴، ۳)، (−۴، −۳) پر

۳ء۶۶ ـ مقلوب مثلثی تفاعلوں کو تفرق کرنا ـ

(ل) فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{جب}^{-۱}\,\text{لا}$ یہ تفاعل متعدد قیمت والا تفاعل ہے یعنی لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی لا تناہی قیمتیں ہیں ۔ ما کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے بالعموم ما کی وہ قیمت لی جاتی ہے جو $-\frac{\pi}{۲}$ اور $+\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان واقع ہو ۔ اس لیے

$$\text{لا} = \text{جب ما} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{جم ما}$$

$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{جم ما}}$ اور اگر ما کی قیمت $-\frac{\pi}{۲}$ اور $\frac{\pi}{۲}$ کے درمیان ہو تو جم ما مثبت ہے اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{جم ما}} = +\frac{۱}{\sqrt{۱-\text{جب}^{۲}\,\text{ما}}} = \frac{+۱}{\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}$

اس کے علاوہ اشتباہ علامت دور کرنے کے لیے ہم یوں بھی کہہ سکتے ہیں کہ جیسے لا کی قیمت −۱ سے +۱ تک بڑھتی ہے تو ما کی قیمت $-\frac{\pi}{۲}$ سے $+\frac{\pi}{۲}$ تک بڑھتی ہے ۔ یعنی مف لا اور مف ما دونوں مثبت ہیں اور لازماً $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

مثبت ہوگا۔

(ب) جم$^{-1}$ لا کو تفرق کرنا

ما = جم$^{-1}$ لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے بالعموم لا کی کسی قیمت کے جواب میں ما کی وہ قیمت لی جاتی ہے جو صفر اور π کے درمیان واقع ہو۔ پس جیسے ما کی قیمت صفر سے π تک بڑھتی ہے لا کی قیمت + ۱ سے گھٹ کر -۱ ہو جاتی ہے یعنی $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ منفی مقدار ہوگی۔

$$\text{اب لا} = \text{جم ما} \qquad \text{اس لیے} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = -\text{جب ما}$$

اور اگر ما کی قیمت صفر اور π کے درمیان ہو تو جب ما مثبت ہوگا۔

$$\text{اس لیے} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{1}{\text{جب ما}} = -\left[\frac{1}{+\sqrt{1-\text{جم}^2\,\text{ما}}}\right] = -\frac{1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$$

ضابطہ (الف) اور (ب) پر مقلوب عمل سے حاصل ہوتا ہے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{جب}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

$$\text{اور} \quad -\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}} = \text{جم}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

جب$^{-1}$ لا اور جم$^{-1}$ لا کے تفرقی سر کی علامتوں کا تعیّن ان کی صدر قیمتوں سے کیا گیا ہے۔ اگر صدر قیمتوں کی مختلف تعریف کی جائے تو علامت بھی بدل سکتی ہے۔ مثلاً اگر جب$^{-1}$ لا سے وہ زاویہ مراد ہو جو $\frac{\pi}{2}$ اور $\frac{3\pi}{2}$ کے درمیان ہے تو جب$^{-1}$ لا کا تفرقی سر منفی ہوگا۔

نیز اگر جم$^{-1}$ لا سے وہ زاویہ مراد ہو جو π اور ۲π کے درمیان ہے تو جم$^{-1}$ لا کا تفرق مثبت ہوگا۔ اور ظاہر ہے کہ جب$^{-1}$ لا = $\frac{\pi}{2}$ + جم$^{-1}$ لا

اس لیے $\pm\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$ کی قیمت جب$^{-1}$ لا + مستقل یا جم$^{-1}$ لا + مستقل لکھی جا سکتی ہے چونکہ $\frac{\pi}{2}$ مستقل میں شریک ہے۔

(ج) مس$^{-1}$ لا کا تفرق :-

ما = مس$^{-1}$ لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ اور $+\frac{\pi}{2}$ کے درمیان لی جاتی ہے اور جیسے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے $+\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتی ہے لا کی قیمت $-\infty$ سے $+\infty$ تک بڑھتی ہے یعنی $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ مثبت ہوگا۔ اور چونکہ π اس کا دور ہے اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ ہمیشہ مثبت رہیگا صدر قیمت کی خواہ کچھ بھی تعریف کی جائے۔

$$\text{لا} = \text{مس ما} \quad \therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{قط}^2\,\text{ما}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{قط}^2\,\text{ما}} = \frac{1}{1+\text{لا}^2}$$

(د) مم$^{-1}$ لا کا تفرق :-

ما = مم$^{-1}$ لا کو واحد قیمت تفاعل بنانے کے لیے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ اور $+\frac{\pi}{2}$ کے درمیان لی جاتی ہے اور جیسے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے بڑھ کر صفر ہوتے ہوئے $\frac{\pi}{2}$ تک جاتی ہے ویسے لا کی قیمت صفر سے گھٹ کر $-\infty$ ہوتی ہے اور پھر $+\infty$ سے صفر تک گھٹتی ہے۔ یعنی $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ ہمیشہ منفی ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{مم ما} \quad \therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = -\text{قم}^2\,\text{ما}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{1}{\text{قم}^2\,\text{ما}} = -\frac{1}{1+\text{لا}^2}$$

نتیجہ (ج) اور (د) کو تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\int \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^2} = \text{مس}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

$$\text{اور} \quad -\int \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^2} = \text{مم}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

ہمیں معلوم ہے کہ $\text{مس}^{-1}\text{لا} = \frac{\pi}{2} - \text{مم}^{-1}\text{لا}$

اور اس لیے $\int \frac{\text{فرلا}}{1+\text{لا}^2}$ کی قیمت $\text{مس}^{-1}\text{لا}$ + مستقل یا مستقل - $\text{مم}^{-1}\text{لا}$ لکھی جاسکتی ہے۔

(ھ) قط^{-1} لا کا تفرقی سر:—

ما = قط^{-1} لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے ما کی وہ قیمت لی جاتی ہے جو صفر اور π کے درمیان ہو لہٰذا جیسے ما صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک اور $\frac{\pi}{2}$ سے π تک بڑھتا ہے لا کی قیمت ایک سے لاتناہی تک اور منفی لاتناہی سے -۱ تک بڑھتی ہے۔

اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ مثبت ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{قط ما} \quad \therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{قط ما مس ما}$$

اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{قط ما مس ما}} = \frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}}$ چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت مثبت ہے۔

(و) قم^{-1} لا کو تفرق کرنا:—

ما = قم^{-1} لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے ما کی وہ قیمت لی جاتی ہے جو $-\frac{\pi}{2}$ اور $+\frac{\pi}{2}$ کے درمیان ہے۔ اب جیسے ما کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے صفر تک اور صفر سے $+\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتی ہے ویسے لا کی قیمت -۱ سے $-\infty$ تک اور پھر $+\infty$ سے ایک تک کم ہوتی ہے اس لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ منفی ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{قم ما} \quad \therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = -\text{قم ما حم ما}$$

$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{1}{\text{قم ما حم ما}} = -\frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}}$ چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ منفی ہے۔

ضابطہ (ھ) اور (و) کو تکمل کرنے سے

$$\int \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}} = \text{قط}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

اور

$$-\int \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}} = \text{قم}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$$

اور جیسا کہ (ا) اور (ب) میں بتایا گیا ہے علامت کا فرق صرف صدر قیمت کی تعریف کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے

اور $\text{قم}^{-1}\,\text{لا} = \frac{\pi}{2} + \text{قط}^{-1}\,\text{لا}$

اس لیے $\pm\int \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-1}}$ کی قیمت $\text{قم}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$ یا $\text{قط}^{-1}\,\text{لا} + \text{مستقل}$ لکھی جا سکتی ہے۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) عف $\left[\text{جب}^{-1}\left(\text{جم}\,\frac{2\,\text{لا}}{3}\right)\right]$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{عف}\left[\text{جب}^{-1}\left(\text{جم}\,\frac{2\,\text{لا}}{3}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\text{جم}^2\frac{2\,\text{لا}}{3}}} \times \left(-\text{جب}\,\frac{2\,\text{لا}}{3}\right) \times \frac{2}{3} = \frac{-\frac{2}{3}\,\text{جب}\,\frac{2\,\text{لا}}{3}}{\text{جب}\,\frac{2\,\text{لا}}{3}} = -\frac{2}{3}$$

مثال (۲) $\frac{\text{فر}}{\text{فر طہ}}\left[\text{مس}^{-1}\left(\text{جم طہ} - \text{جب طہ}\right)\right]$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر طہ}}\left[\text{مس}^{-1}\left(\text{جم طہ} - \text{جب طہ}\right)\right] = \frac{\frac{\text{فر}}{\text{فر طہ}}\left(\text{جم طہ} - \text{جب طہ}\right)}{1+\left(\text{جم طہ} - \text{جب طہ}\right)^2} = \frac{-\text{جب طہ} - \text{جم طہ}}{2 - 2\,\text{جب طہ جم طہ}} = \frac{\text{جب طہ} + \text{جم طہ}}{\text{جب}\,2\,\text{طہ} - 2}$$

مشقی سوالات ۱۷

ذیل کو تفرق کرو:—

(۱) قط^-۱ (جم ۲ لا + ۳) (۲) جم^-۱ (جب ۲ لا) (۳) جم^-۱ لا/و

(۴) جب^-۱ لا/و (۵) مس^-۱ لا/و (۶) قط^-۱ لا/و (۷) جم^-۱ لا/و - تم^-۱ لا/و

(۸) قط^-۱ (۱ - لا) (۹) لا^۲ مس^-۱ لا (۱۰) لا مس^-۱ لا^۲ + ۵/۲ مس^-۱ لا/۲

(۱۱) مس^-۱ √لا (۱۲) ۲ √(لا - ۴) + ۲ مس^-۱ √(لا - ۴)/۲

(۱۳) جب^-۱ لا^۲ + ۵ لا قط^-۱ لا/۲

(۱۴) قط^-۱ (ا لا^۲ + ب لا + ج) × قم^-۱ (ا لا^۲ + ب لا + ج)

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-

(۱۵) ∫ فرلا / √(ا^۲ - لا^۲) (۱۶) - ∫ فرلا / √(۴ - ۹ لا^۲) (۱۷) ∫ فرلا / (ا^۲ + لا^۲)

(۱۸) ∫ فرلا / (ا^۲ + (ب لا + ج)^۲) (۱۹) ∫ لا فرلا / (۹ + ۴ لا^۴) (۲۰) ∫ (۱ - ۳ / (۴ + ۳ لا^۲)) فرلا

(۲۱) ∫ (۴ لا^۲ + ۳) / (۳ لا^۲ + ۱) فرلا (۲۲) ∫ (ا لا^۲ + ب) / (لا^۲ + د^۲) فرلا (۲۳) ∫ فرلا / √(۵ - ۷ لا^۲)

(۲۴) ∫ فرلا / √(ا^۲ - (و - لا)^۲) (۲۵) ∫ فرط / √(ب ط - ط^۲) (۲۶) ∫ د فرد / √(۶ د^۲ - ۸ د^۴)

(۲۷) ∫ فرلا / لا √(لا^۲ - ا^۲) (۲۸) ∫ ۳ فرلا / ۴ لا √(۴ لا^۲ - ۹) (۲۹) ∫ فرلا / لا √(۴ لا^۲ - ۱۲)

(۳۰) ∫ (۳ - ۱ / لا √(۵ لا^۲ - ۳)) فرلا

۷ ۳۔ لوگارتھم اور قوت نما تفاعلوں کی تعریف :-

پہلے باب میں بتایا گیا ہے کہ نہا (ن ← ∞) (۱ + ۱/ن)^ن ایک معین عدد کی طرف

مائل ہوتی ہے اور اس عدد کو قو سے تعبیر کیا جاتا ہے ۔

$$قو = ۱ + ۱ + \frac{۱}{\lfloor ۲} + \frac{۱}{\lfloor ۳} + \frac{۱}{\lfloor ۴} + \ldots = \ldots ۲٫۷۱۸$$

اسی طرح $قو^{لا} = نہیا_{ن \to \infty} \left(۱ + \frac{لا}{ن}\right)^{ن} = ۱ + لا + \frac{لا^۲}{\lfloor ۲} + \frac{لا^۳}{\lfloor ۳} + \ldots$

تفاعل $قو^{لا}$ کو قوت نما تفاعل کہتے ہیں۔ اس کے مقلوب تفاعل لوکارتمی تفاعل کی تعریف حسب ذیل کرینگے کہ اگر ما = $ا^{لا}$ تو کہتے ہیں کہ ما کا لوکارتم بہ اساس ا مساوی ہے لا کے اور علامتوں میں ظاہر کرتے ہیں کہ $لوک_ا$ ما = لا، اساس ا کی قیمت کچھ بھی لی جا سکتی ہے لیکن اعلیٰ ریاضی میں اساس قو اور حسابی سوال میں اساس ۱۰ لینے سے بہت سہولت ہوتی ہے اور اگر لوکارتم کا اساس واضح طور پر بیان نہ ہو تو احصا کے سوال میں قو اور حسابی سوال میں ۱۰ مان لیا جائے ۔ لوکارتم کی ابتدائی خاصیتوں سے طالب علم الجبرا میں خوب واقف ہے اور اس لیے یہاں بیان کرنے کی کوئی ضرورت نہیں ہے ۔ لوکارتم تفاعل کی تعریف قوت نما تفاعل کے مقلوب تفاعل کی طرح کی گئی ہے ۔ لیکن اعلیٰ ریاضی لوکارتم تفاعل کی تعریف بالعموم ایک تکملہ سے کیجاتی ہے ۔ معیاری شکلوں میں بتایا گیا ہے کہ $\int \frac{فرلا}{لا}$ کی قیمت الجبرا کے تفاعلوں کی رقوم میں نہیں بیان ہو سکتی ہے۔ اس کے لیے ایک نیا تفاعل ایجاد کیا جاتا ہے جس کی تعریف ہوگی۔

$\int \frac{فرلا}{لا} = لوک_و لا + ھ$ ، اس میں مستقل کو تعین کرنے کے لیے فرض کرو کہ $لوک_و ۱ = ۰$ اس لیے $\int_۱^{لا} \frac{فرلا}{لا} = لوک_و لا$ ، اس تعریف سے لوکارتم تفاعل کی تمام خاصیتیں بہت صحت کے ساتھ ثابت ہو جاتی ہیں اور اس لیے یہ تعریف عام طور پر مروج ہے ۔

نیز معلوم ہے کہ $لوک_و (۱ + لا) = لا - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \ldots$ جبکہ لا > ۱

اس پھیلاؤ کی مدد سے عددوں کے لوکارتم نکالے جاتے ہیں اور پھر اس کو

اساس ۱۰ پر تبدیل کر لیا جاتا ہے ۔

۳٫۷۵ ۔ قوت نما اور لوکارثم تفاعل کو تفرق کرنا :۔

(ا) **قوت نما تفاعل کا تفرق** :۔ فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{و}^{\text{لا}}$

اس لیے $\text{مف ما} = \text{و}^{\text{لا}+\text{مف لا}} - \text{و}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا}}\left(\text{و}^{\text{مف لا}} - 1\right)$

$$\therefore \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \frac{\text{و}^{\text{مف لا}} - 1}{\text{مف لا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{و}^{\text{لا}} \times \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0} \frac{\text{و}^{\text{مف لا}} - 1}{\text{مف لا}}$$

$$= \text{و}^{\text{لا}} \times 1 = \text{و}^{\text{لا}}$$ [دیکھو دفعہ ۲٫۴۵]

اور مقلوب عمل سے $\int \text{و}^{\text{لا}}\, \text{فر لا} = \text{و}^{\text{لا}} + \text{مستقل}$

نیز $\text{ا}^{\text{لا}}$ کا تفرق معلوم کرنے کے لیے ظاہر ہے کہ

$$\text{ا}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا}\,\text{لوک}_{\text{و}}\text{ا}} \quad \text{چونکہ} \quad \text{و}^{\text{لوک}_{\text{و}}\text{ا}} = \text{ا}$$

اس لیے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\text{ا}^{\text{لا}}\right) = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left[\text{و}^{\text{لا}\,\text{لوک}_{\text{و}}\text{ا}}\right] = \text{و}^{\text{لا}\,\text{لوک}_{\text{و}}\text{ا}} \times \text{لوک}_{\text{و}}\text{ا}$

$$= \text{ا}^{\text{لا}} \times \text{لوک}_{\text{و}}\text{ا}$$

اور $\int \text{ا}^{\text{لا}}\, \text{فر لا} = \frac{\text{ا}^{\text{لا}}}{\text{لوک}_{\text{و}}\text{ا}} + \text{مستقل}$

(ب) **لوکارثم تفاعل کا تفرق** :۔ فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{لوک}_{\text{و}}\text{لا}$

$\therefore \text{لا} = \text{و}^{\text{ما}}$ اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{و}^{\text{ما}} = \text{لا}$

اس لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا}}$

ابتدائی اصولوں سے لوکارتم کا تفرق نکالنے کے لیے

$$\text{مف ما} = \text{لوک}\,(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{لوک لا} = \text{لوک}\left(\frac{\text{لا} + \text{مف لا}}{\text{لا}}\right) = \text{لوک}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)$$

$$\therefore \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{۱}{\text{مف لا}} \times \text{لوک}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right) = \frac{۱}{\text{لا}} \times \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}\,\text{لوک}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{۱}{\text{لا}} \times \text{لوک}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \underset{\text{مف لا} \to ۰}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{۱}{\text{لا}} \times \underset{\text{مف لا} \to ۰}{\text{نہا}}\, \text{لوک}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}} \quad \text{اور اگر ن} = \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}$$

$$= \frac{۱}{\text{لا}} \underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}}\, \text{لوک}\left(۱ + \frac{۱}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}} = \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{قو} = \frac{۱}{\text{لا}} \qquad [\text{دیکھو دفعہ ۴۶،۲}]$$

اسی طرح لوک$_{\text{ا}}$ لا کا تفرقی سر معلوم کرنے کے لیے

$$\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{لا} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا} \times \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{و}$$

$$\therefore \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left[\text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{لا}\right] = \frac{۱}{\text{لا}} \times \text{لوک}_{\text{ا}}\,\text{قو} = \frac{۱}{\text{لا}} \times \frac{۱}{\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}}$$

$$\text{اور تکمل سے} \int \frac{\text{فر لا}}{\text{لا}} = \text{لوک لا} + \text{مستقل}$$

دفعہ ۶۱،۳ میں لا$^{\text{ن}}$ کا تفرقی سر نکالا گیا ہے جبکہ ن مثبت صحیح عدد ہے۔
اگر ن منفی مقدار یا کسر ہو تو ضابطہ ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ ما = لا$^{\text{ن}}$ اور لوکارتم لینے سے

$$\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ما} = \text{ن}\,\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{لا}$$

$$\text{اس لیے}\quad \frac{۱}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ن} \times \frac{۱}{\text{لا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ن} \times \text{ما}}{\text{لا}} = \frac{\text{ن} \times \text{لا}^{\text{ن}}}{\text{لا}} = \text{ن لا}^{\text{ن}-۱}$$

(ج) ی$^{\text{و}}$ کو تفرق کرنا جبکہ ی اور و دونوں متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

فرض کرو کہ $ما = ءُ$

اس کا لوکارتم لینے سے

$لوک\ ما = و\ لوک\ ء$

تفرق کرنے سے $\frac{1}{ما}\frac{فر\ ما}{فر\ لا} = \frac{فر\ و}{فر\ لا} لوک\ ء + و \times \frac{1}{ء}\frac{فر\ ء}{فر\ لا}$

اس لیے $\frac{فر\ ما}{فر\ لا} = ءُ \times لوک\ ء \times \frac{فر\ و}{فر\ لا} + و \times ء^{و-1}\frac{فر\ ء}{فر\ لا}$

الفاظ میں اس تفرق کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ ءُ کا تفرقی سر دو رقموں کا مجموعہ ہے جس کی پہلی رقم قوت نما کو متغیر اور ء کو مستقل مان کر تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور دوسری رقم قوت نما کو مستقل مان کر تفاعل ء کو تفرق کرنے سے۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) $(لا^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{2}{3}} و^{2لا-1}$ کو بلحاظ لا کے تفرق کرو۔

$$عف\left[(لا^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{2}{3}} و^{2لا-1}\right] = و^{2لا-1} عف\,(لا^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{2}{3}} + (لا^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{2}{3}} عف\, و^{2لا-1}$$

$$= \frac{2}{3}(لا^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{2}{3}-1} \times \frac{3}{2} لا^{\frac{3}{2}-1} و^{2لا-1} + (لا^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{2}{3}} \times و^{2لا-1} \times 2$$

$$= \frac{لا^{\frac{1}{2}} و^{2لا-1}}{(لا^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{1}{3}}} + 2\,(لا^{\frac{3}{2}} - 1)^{\frac{2}{3}} \times و^{2لا-1}$$

مثال (۲) عف [لوک (۲ جم ۳ لا ۔ ۵ جب لا)] کی قیمت دریافت کرو۔

$$عف\left[لوک\,(2\,جم\,3\,لا - 5\,جب\,لا)\right] = \frac{1}{2\,جم\,3\,لا - 5\,جب\,لا} \times عف\,(2\,جم\,3\,لا - 5\,جب\,لا)$$

= (-۶ جیب ۳لا - ۵ جم لا) / (۲ جم ۳لا - ۵ جب لا) = (۶ جب ۳لا + ۵ جم لا) / (۵ جب لا - ۲ جم ۳لا)

مثال (۳) ∫ مس لا فرلا اور ∫ مم لا فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

ہمیں معلوم ہے کہ عف لوک جیب لا = (۱ / جب لا) عف جب لا = جم لا / جب لا = مم لا

اور عف لوک جم لا = (۱ / جم لا) × (-جب لا) = -مس لا

∴ عف لوک قط لا = مس لا

ان نتیجوں کو تکمل کرنے سے

∫ مم لا فرلا = لوک جب لا + مستقل

اور ∫ مس لا فرلا = لوک قط لا + مستقل

= مستقل - لوک جم لا

مشقی سوالات ۱۸

ذیل کو تفرق کرو :—

(۱) جب لا / لا (۲) لوک (لا + ما) = فو^ما (۳) فو^(ما^لا)

(۴) لا^لا (۵) (ما^لا)^(لا^۲) (۶) لوک (۲لا^۲ + ۳لا - ۵)

(۷) فو^(۵لا^۲ + ۷) (۸) (لا^لا)^(ما^لا) (۹) لوک (۴لا^۲ + ۳لا) / ما فو^لا

(۱۰) (جب لا)^(مس لا) (۱۱) (مس لا)^(مس لا) (۱۲) (قط لا)^(قم لا)

(۱۳) فو^(مس^-۱ (قط لا/۲)) (۱۴) فو^(۲لا^۲ - ۳لا) × [لوک (۴لا^۲ + ۳)]^۲

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :—

(۱۵) $\int \text{و}^{\text{لا}^{۲}+۳}\,\text{فرلا}$　(۱۶) $\int \text{و}^{۵\text{لا}-۱}\,\text{فرلا}$

(۱۷) $\int (۴\text{لا}+۳)\,\text{و}^{۲\text{لا}^{۲}+۳\text{لا}-۴}\,\text{فرلا}$　(۱۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{۴\text{لا}+۳}$

(۱۹) $\int \frac{\text{فرلا}}{۷\text{لا}-۲}$　(۲۰) $\int \frac{(۱۴\text{لا}+۵)\,\text{فرلا}}{۷\text{لا}^{۲}+۵\text{لا}-۱}$　(۲۱) $\int \left(۳+\frac{۱}{۲\sqrt{\text{لا}}}\right)\text{و}^{۳\text{لا}+\sqrt{\text{لا}}}\,\text{فرلا}$

(۲۲) $\int \frac{۳\,\text{فرلا}}{۷\text{لا}+۸}$　(۲۳) $\int \frac{۳\text{لا}+۷}{۴\text{لا}+۳}\,\text{فرلا}$　(۲۴) $\int \frac{۳\text{لا}^{۲}+۷\text{لا}}{۲\text{لا}^{۳}+\text{لا}-۱}\,\text{فرلا}$

۳ء۸ - اعلیٰ رتبہ کے تفرقی سر:- کسی تفاعل کو تفرق کرنے سے اس کا مشتق تفاعل حاصل ہوتا ہے - یہ بھی بالعموم متبوع متغیر کا تفاعل ہوگا اور اس کو دوبارہ تفرق کیا جاسکتا ہے - مثلاً فرض کرو $\text{ما} = ۴\,\text{لا}^{۳}$ تو $\text{عف ما} = ۱۲\,\text{لا}^{۲}$ اور چونکہ عف ما بھی لا کا تفاعل ہے اس کو دوبارہ تفرق کرنے سے ۲۴ لا حاصل ہوگا - یعنی $۴\text{لا}^{۳}$ کو دو مرتبہ مسلسل تفرق کرنے سے ۲۴ لا حاصل ہوتا ہے - علامتوں میں اس چیز کو یوں بیان کرینگے:

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right] = \text{عف}\,(\text{عف ما}) = ۲۴\,\text{لا}$$

$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right]$ کو اختصاراً $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}$ لکھتے ہیں اور اسی طرح $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left[\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}\right]$ کو $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}}$ سے تعبیر کرینگے -

دو مرتبہ تفرق کرنے کے نتیجے کو دوسرے رتبہ کا تفرقی سر کہا جاتا ہے اور ن مرتبہ مسلسل تفرق کرنے سے ن رتبہ کا تفرقی سر $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$ حاصل ہوگا - نیز تفرق کے عمل $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ کو عف سے بھی تعبیر کیا گیا ہے - اس لیے دوسرے رتبے کے تفرقی سر کا عامل $\frac{\text{فر}^{۲}}{\text{فرلا}^{۲}}$ ہوگا عف (عف) یعنی $\text{عف}^{۲}$ اور اسی طرح

تیسرے چوتھے، وغیرہ رتبہ کے تفرقی سروں کے عامل ہونگے عف^{۳}، عف^{۴} .....
عف^{ن} ...... یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ عامل عف الجبرا کے تین مشہور قوانین کی
پابندی کرتا ہے اور عف کو الجبرا کی مقدار کی طرح استعمال کیا جاسکتا ہے۔

چونکہ غلطی کا امکان ہے اس لیے مکرر بیان کر دیا جاتا ہے کہ $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^{۲}$ یا
(عف ما)^{۲} پہلے رتبے کے تفرقی سر کا مربع ہے اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ یا عف^{۲} ما دوسرے
رتبہ کا تفرقی سر ہے۔ یہ دونوں چیزیں بالکل مختلف ہیں۔

اب اگر ف (لا) کے پہلے رتبے کے تفرق کو فَ (لا) یا ف$_{لا}$ (لا) سے
تعبیر کیا جائے تو ظاہر ہے کہ دوسرے رتبے کے تفرق کو فً (لا) یا
ف$_{لالا}$ (لا) سے اور اسی طرح تیسرے، چوتھے رتبوں وغیرہ کے تفرقی سروں
کو فً (لا)، فً (لا) .... سے۔

بعض سوالوں میں تفاعل کے ن رتبے کے تفرقی سر کو آسانی سے
بیان کیا جاسکتا ہے اور ان کی اہم صورتیں بطور مثال کے دیجائینگی۔
باب چہارم میں اعلیٰ رتبے کے تفرقی سر اور بالخصوص دوسرے رتبے کے
تفرقی سر کے علم ہندسہ اور علمی ریاضی میں اطلاقات بیان کیے جائینگے۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) لا^{ن} کے ر۔ رتبے کا تفرقی سر دریافت کرو جبکہ ر < ن

عف (لا^{ن}) = ن لا$^{ن-۱}$

عف^{۲} (لا^{ن}) = ن (ن-۱) لا$^{ن-۲}$

اسی طرح عف^{ر} (لا^{ن}) = ن (ن-۱) (ن-۲) ... (ن-ر+۱) لا$^{ن-ر}$

مثال (۲) عف^{ن} (جب لا) کی قیمت دریافت کرو۔

عف (جب لا) = جم لا = جب (لا + $\frac{\pi}{۲}$)

∴ عف^{۲} (جب لا) = جم (لا + $\frac{\pi}{۲}$)

= جب (لا + $\frac{\pi}{۲}$ + $\frac{\pi}{۲}$) = جب (لا + $\frac{\pi \times ۲}{۲}$)

∴ عف^{۳} (جب لا) = جب (لا + ۳ × $\frac{\pi}{۲}$)

∴ عف^{ن} (جب لا) = جب (لا + $\frac{ن\pi}{۲}$)

اسی طرح عف^{ن} (جم لا) = جم (لا + $\frac{ن\pi}{۲}$)

مثال (۳) عف^{ن} [لوک$_{و}$ (ا + لا)] کی قیمت دریافت کرو۔

عف [لوک$_{و}$ (ا + لا)] = $\frac{۱}{ا + لا}$

عف^{۲} [لوک (ا + لا)] = $\frac{-۱}{(ا + لا)^{۲}}$

عف^{۳} [لوک (ا + لا)] = $\frac{(-۱) \times (-۲)}{(ا + لا)^{۳}}$

∴ عف^{ن} [لوک (ا + لا)] = $\frac{(-۱)(-۲) \times (-۳) \dots (-ن+۱)}{(ا + لا)^{ن}}$

مثال (۴) عف^{ن} و^{الا} کی قیمت دریافت کرو۔

عف و^{الا} = ا و^{الا}، عف^{۲} و^{الا} = ا^{۲} و^{الا}

اسی طرح عف^{ن} و^{الا} = ا^{ن} و^{الا}

مثال (۵) عف^{ن} [و^{الا} × ﻻ] کی قیمت دریافت کرو۔ جہاں ﻻ متغیر لا کا کوئی تفاعل ہے۔

عف (و^{الا} × ﻻ) = ا و^{الا} ﻻ + و^{الا} عف ﻻ = و^{الا} (ا + عف) ﻻ

اور عف^{۲} (و^{الا} × ﻻ) = عف [و^{الا} (عف + ا) ﻻ] = و^{الا} (عف + ا)^{۲} ﻻ

اسی طرح عف^{ن} (و^{الا} ﻻ) = و^{الا} (عف + ا)^{ن} ﻻ

مشقی سوالات ۱۹

ذیل کی قیمت دریافت کرو:—

(۱) عف^{۳} (۵ لا^{۳} ـ ۷ لا + ۲)   (۲) عف^{۴} (۶ لا^{۷} + ۷ لا^{۵} ـ ۱۲ لا)

(۳) عف^{۴} جم (۲ لا + ۳)   (۴) عف^{۳} (و$^{۲لا-۳}$)

(۵) عف^{۴} [و$^{۲ لوک لا}$]   (۶) عف^{۲} و$^{جب لا}$

(۷) اگر لا = ا جم (ن ت + س) + ب جب (ن ت + س)

توثابت کرو کہ عف$^{۲}_{ت}$ لا + ن^{۲} لا = ۰

(۸) ما = و$^{ا لا}$ جم (ن لا) تو عف^{ن} ما معلوم کرو

(۹) عف^{ن} (جب^{۲} لا) معلوم کرو۔

(۱۰) اگر لا = ج$_{۱}$ جم (لوک ما) + ج$_{۲}$ جب (لوک لا)

توثابت کرو کہ ما^{۲} $\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فر ما}^{۲}}$ + ما $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$ + لا = ۰

(۱۱) اگر طہ = ا جم ($\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ ت + عہ)

توثابت کرو کہ ل $\frac{\text{فر}^{۲}\text{طہ}}{\text{فر ت}^{۲}}$ + ج طہ = ۰

(۱۲) ما = لا$^{لا^{لا}}$ تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت حاصل کرو۔

(۱۳) اگر ما = ج$_{۱}$ و^{۳لا} + ج$_{۲}$ و^{۴لا}

توثابت کرو کہ عف^{۲} ما ـ ۷ عف ما + ۱۲ ما = ۰

(۱۴) اگر ما = ج$_{۱}$ و^{لا} + ج$_{۲}$ و^{۳لا} + ج$_{۳}$ و$^{-۴لا}$

توثابت کرو کہ عف^{۳} ما ـ ۱۳ عف ما + ۱۲ ما = ۰

ذیل کی قیمت دریافت کرو:ـ

(۱۵) $\frac{\text{فر}^{ن}}{\text{فر لا}^{ن}}$ ($\frac{۲}{۳ + \text{لا}}$)   (۱۶) عف^{ن} [لوک (۲ لا ـ ۳)]

(۱۷) عف^{ا} (لا^{۳} و^{۲لا})   (۱۸) عف (جب لا)$^{\text{جم لا}}$

(۱۹) عف (جب لا)$^{\text{مس لا}}$　　(۲۰) عف^{۶} (لا و$^{\text{لا}}$)

(۲۱) $\iint$ لا^{۲} فرلا فرلا　　(۲۲) $\iint$ (لا^{۲} ـ ۳ لا + ۱) فرلا فرلا

(۲۳) $\iint$ جب لا فرلا فرلا　　(۲۴) $\iint$ ھ فرت فرت

(۲۵) $\iint \frac{۱}{(\text{لا} - ۳)^{۴}}$ فرلا فرلا　　(۲۶) $\iiint \frac{۵}{(۲\text{لا} + ۷)^{۳}}$ فرلا فرلا فرلا

۳۶۹ - جزوی مشتق :— اب تک ہم نے ایسے تفاعلوں پر غور کیا جن میں متغیروں کی تعداد دو ہے ۔ ظاہر ہے کہ ان دو متغیروں میں سے کسی ایک کو کوئی بھی قیمت دے دیں تو دوسرے کی قیمت متعین ہو جاتی ہے ۔ اس لیے اول الذکر کو متبوع متغیر اور موخرالذکر کو تابع متغیر کہتے ہیں ۔ اب اگر تفاعل میں دو سے زیادہ متغیر ہوں فرض کرو تین ہوں تو دو متغیروں کو آزادانہ کچھ بھی قیمت دینے سے تیسرے متغیر کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے ۔ اس لیے ایسے تفاعل میں دو متغیروں کو متبوع متغیر اور ایک کو تابع متغیر کہتے ہیں ۔ برخلاف اس کے اگر تین متغیروں میں دو رشتے ہوں تو الجبرا سے حل کر کے کسی دو متغیروں کو علٰحدہ علٰحدہ ایک متغیر کی رقوم میں دو رشتوں سے بیان کیا جا سکتا ہے ۔ اس لیے اس میں در اصل ایک ہی متبوع متغیر ہے اور دو تابع متغیر ہیں ۔ اب یہ ظاہر ہے کہ متبوع متغیر کی قیمت میں فرق کی وجہ سے دونوں تابع متغیروں کی قیمتوں میں فرق ہو گا اور ان سے دونوں تابع متغیروں کے تفرقی سر حاصل ہو جائینگے ۔ لیکن اگر کسی تفاعل میں دو متبوع متغیر ہوں اور ایک تابع متغیر ہو فرض کرو کہ ی = ف (لا، ما) تو چونکہ لا اور ما متبوع متغیر ہیں اس لیے لا کی قیمت کے فرق کا ما کی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا اور برعکس اس کے ۔ صرف لا کی قیمت کے فرق سے ی کی قیمت میں فرق آتا ہے اور اسی طرح صرف ما کی قیمت کے فرق سے ۔ لا کے اس قسم کے فرق کو جزوی فرق کہتے ہیں اور علامت میں جفـ سے اختصار کرتے ہیں ۔

پس $\text{ی} + \text{جف ی} = \text{ف}(\text{لا} + \text{جف لا}، \text{ما})$ جہاں ما کی قیمت میں
کوئی فرق واقع نہیں ہوا۔ اب اگر $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{ف}(\text{لا}+\text{جف لا}، \text{ما}) - \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})}{\text{جف لا}}$ کی
انتہا وجود رکھتی ہے جبکہ $\text{جف لا} \to ۰$ تو کہتے ہیں کہ ی بلحاظ لا کے جزوی
تفرق پذیر ہے اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ کو ی کا بلحاظ لا پہلے رتبے کا جزوی مشتق کہتے ہیں۔

اسی طرح $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{نہا}_{\text{جف ما} \to ۰} \frac{\text{ف}(\text{لا}، \text{ما} + \text{جف ما}) - \text{ف}(\text{لا}، \text{ما})}{\text{جف ما}}$ وجود
رکھتا ہو تو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ کو ی کا بلحاظ ما جزوی مشتق کہتے ہیں۔ دفعہ ۸، ۳ سے
ظاہر ہے کہ پہلے رتبے کے جزوی مشتق بھی بالعموم لا اور ما کے تفاعل ہونگے
اور انھیں پھر لا اور ما کے لحاظ سے جزواً تفرق کیا جا سکتا ہے۔ سادہ تفرقی
سروں کی ترقیم کے مطابق دوسرے رتبے کے جزوی مشتق ہونگے۔

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ی}}{\text{جف لا}^{۲}}، \quad \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ی}}{\text{جف ما}^{۲}}$$

اور
$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} \text{ اور } \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ی}}{\text{جف ما جف لا}}$$

اسی طرح تیسرے اور اعلیٰ رتبے کے جزوی مشتقات۔ چند شرائط کے تحت
جو اکثر سوالات میں پوری ہوتی ہیں بلحاظ لا اور ما دوسرے رتبے کے جزوی مشتق
میں ترتیب تفرق کو باہم بدلا جا سکتا ہے۔ یعنی

$$\frac{\text{جف}^{۲}\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^{۲}\text{ی}}{\text{جف ما جف لا}}$$

اگلے باب میں جزوی مشتقوں کی ہندسی تعبیر بتائی جائیگی۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) $\text{۲ لا} + \text{۳ ما} - \text{ی} = \text{۵}$ تین ابعاد میں ایک مستوی کو تعبیر کرتا ہے۔ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{ی} = \text{۲ لا} + \text{۳ ما} - \text{۵}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{۲} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{۳}$$

مثال (۲) :- اگر $\text{ی} = \text{۲ لا}^{\text{۲}} + \text{۳ لا ما} + \text{۵ ما}^{\text{۲}} - \text{۶ لا} + \text{۷ ما}$

تو $\frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{ ی}}{\text{جف لا}^{\text{۲}}}$، اور $\frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}}$ اور $\frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{ ی}}{\text{جف ما}^{\text{۲}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{۴ لا} + \text{۳ ما} - \text{۶} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{۳ لا} + \text{۱۰ ما} + \text{۷}$$

اس لیے $\frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{ ی}}{\text{جف لا}^{\text{۲}}} = \text{۴}$، $\frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{ ی}}{\text{جف ما}^{\text{۲}}} = \text{۱۰}$ اور $\frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{۲}}\text{ ی}}{\text{جف ما جف لا}} = \text{۳}$

مشقی سوالات ۲۰

(۱) کُرہ $\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}} + \text{ی}^{\text{۲}} = \text{ا}^{\text{۲}}$ میں $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ کی قیمت دریافت کرو۔ نیز دوسرے رُتبے کے جزوی مشتقوں کی قیمت دریافت کرو۔

(۲) اگر $\text{ء} = \text{لا}^{\text{ما}}$ تو $\frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

(۳) $\text{ی} = \text{جب}^{\text{-۱}}\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ سے $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ اور دوسرے رُتبے کے جزوی مشتقات کی قیمت معلوم کرو۔

(۴) $\text{د} = (\text{ل لا}^{2} + \text{ب ما}^{2} + \text{ج ی}^{2})^{\text{ن}}$ سے $\frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۵) اگر $\text{ی} = ۲\text{لا}^{۳}\text{ما}^{۲} - ۳\,\text{لا ما}^{۴} + ۴\,\text{لا}^{۲}\text{ما}^{۳}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۵\text{ی}$$

(۶) اگر $\text{د} = \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب ما} + \text{و}^{\text{ما}}\,\text{جب لا}$ تو $\left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\right)^{۲}$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۷) اگر $\text{د} = \text{لوک}\,(\text{لا}^{۳} + \text{ما}^{۳} + \text{ی}^{۳} - ۳\,\text{لا ما ی})$

تو $\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}$ کی قیمت حاصل کرو۔

(۸) اگر $\text{د} = \text{لوک}\,(\text{مس لا} + \text{مس ما} + \text{مس ی})$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{جب ۲لا}\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} + \text{جب ۲ما}\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}} + \text{جب ۲ی}\frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}} = ۲$$

باب سوم پر متفرق سوالات

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو:۔

(۱) $(\text{لا}^{۳} + ۳\text{لا}^{۲} - ۱)^{۴}$ (۲) $\frac{(\text{لا}^{۳} - ۱)^{۲}}{۵\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} - ۱}$

(۳) $\text{جب}\left(\frac{۲\text{لا} + ۳}{\text{لا} - ۱}\right)$ (۴) $\text{مس}\left(\frac{۱}{۱ - \text{لا}}\right)$

(۵) $\text{جب}^{-۱}\left(\sqrt{۱ - ۲\text{لا}^{۲}}\right)$ (۶) $\text{جم}^{-۱}\left(\frac{۲\text{لا}}{\sqrt{۱ - ۳\text{لا}^{۲}}}\right)$

(۷) $\text{مس}^{-۱}\left(\frac{۷\text{لا}^{۲}}{۲\text{لا}^{۲} - ۱}\right)$ (۸) $\text{قم}^{-۱}\,\frac{۱}{۲\,\text{ما}}$

(۹) $\text{لوک}\left(\text{جب}\ \frac{\text{ط}}{۲}\right)$

(۱۰) $\frac{\text{لا}}{۱ + \text{لوک لا}}$

(۱۱) $\text{لوک}\sqrt{\frac{۱ - \text{جب ط}}{۱ + \text{جب ط}}}$

(۱۲) $\text{لا}^{۳}\ \text{و}^{۲ - ۳\text{لا}^{۲}}$

(۱۳) $\frac{(\text{لا} + ۲)(\text{لا} - ۳)}{(\text{لا} + ۴)(\text{لا} - ۵)}$

(۱۴) $\text{لا} + \text{جب}^{-۱}\frac{۱}{\text{لا}} = ۰$

(۱۵) $\frac{\text{لا}^{۲}}{۵} + \frac{\text{ی}^{۲}}{۹} = ۱$

(۱۶) $\text{جب لا}\ \text{و}^{\text{مس لا}}$

(۱۷) $\text{و}^{\text{جب}^{۲}\text{لا}} \times \text{مس لا}$

(۱۸) $\frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{۲}$

(۱۹) $\frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{۲}$

(۲۰) $\frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}$

(۲۱) $(\text{جب}^{-۱}\text{لا})^{\text{مس لا}}$

(۲۲) $(\text{قم}^{-۱}\text{لا})^{\text{جب لا}}$

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-

(۲۳) $\int \frac{۲\text{لا} + ۳}{۴\text{لا}^{۲} + ۳}\ \text{فرلا}$

(۲۴) $\int \frac{۲\text{لا} + ۱}{(۳\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} - ۵)^{\frac{۳}{۲}}}\ \text{فرلا}$

(۲۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا} + ۱۲}$

(۲۶) $\int \text{لا}\ \text{و}^{۳\text{لا}^{۲}}\ \text{فرلا}$

(۲۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۳ - ۷\text{لا}^{۲}}}$

(۲۸) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۵\text{لا} - ۴\text{لا}^{۲}}}$

(۲۹) $\int \frac{\text{لا فرلا}}{\text{لا}^{۴} + ۵}$

(۳۰) $\int \frac{\text{ص فرص}}{۵\text{ص}^{۴} + ۳}$

(۳۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۵\text{لا}^{۲} - ۳}}$

(۳۲) $\int \frac{\text{فرس}}{\text{س}\sqrt{۴\text{س}^{۲} - ۱}}$

(۳۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۵\text{لا}^{۲} - ۴}}$

(۳۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{۲\text{لا}^{۲} + ۷\text{لا} + ۱۱}$

(۳۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲} - ۱}$

(۳۶) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا} + ۲)(\text{لا} + ۳)}$

(۳۷) ∫ لا فرلا / ((لا + ۱)(لا + ۳))　　　(۳۸) ∫ مس (۲لا + ۳) فرلا

(۳۹) ∫ قط (لا - ۳) فرلا　　　(۴۰) ∫ فرا / √(۲ا - ۳ا^۲)

ذیل کی قیمت دریافت کرو:-

(۴۱) عف^۷ (لا^۳ و^۲لا)　　　(۴۲) عف^۵ (جم ۳لا)

(۴۳) عف^۶ (۲ / (۳ - لا))　　　(۴۴) عف^ن (جب ۲لا)

(۴۵) عف^۲ [و^لا جب (لا^۲)]　　　(۴۶) عف^۲ [جم^۳ (لوک لا)]

(۴۷) عف^۲ (و^(قط^-۱ ۲ط))　　　(۴۸) عف^۲ (مس مقلوب لا^لا)

(۴۹) عف [(۱ - ۳لا^۲) و^(۱/لا)]　　　(۵۰) عف [(م + لا)/(۱ + م^۲)　و^(مس^-۱ لا) / √(۱ + لا^۲)]

(۵۱) عف^۲ [لوک √((د^۲ - ب لا^۲)^ن)]

ذیل کی مساواتوں میں پہلے اور دوسرے رُتبے کے جزوی مشتقوں کی قیمتیں دریافت کرو۔ تابع متغیر واضح نہ ہونے کی صورت میں بتادیا گیا ہے۔

(۵۲) لا^۲/د^۲ + ا^۲/ب^۲ + ی^۲/ج^۲ = ۱　(تابع متغیر ی)

(۵۳) ۲لا^۲ + ۳ا^۲ - ی^۲ = ۱　(تابع متغیر ی)

(۵۴) ۲ی = لا^۲/۲ - لا ا/۳ + ۲ا^۲/۵　　　(۵۵) ی = جب^-۱ لا + جب^-۱ ا

(۵۶) ی = جم^-۱ (لا ا / (لا^۲ + ا^۲))

(۵۷) $\text{د} = \text{لوک}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2) - \text{لوک}\,(\text{لا ما ی})$

(۵۸) $\text{د} = \text{و}^{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2}$ (۵۹) $\text{ی} = \text{و}^{\text{لا} + \text{ما}}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)$

(۶۰) اگر $\text{ی} = ۳\,\text{لا}^4\,\text{ما}^3 + ۲\,\text{لا}^3\,\text{ما}^4 - \text{لا}^2\,\text{ما}^5 - ۷\,\text{لا}\,\text{ما}^6$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{لا}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} + \text{ما}\,\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۷\,\text{ی}$$

ذیل کے تفاعلوں میں تصدیق کرو کہ دونوں منبوع متغیروں کے دوسرے رتبے کے جزوی مشتق میں ترتیب تفرق سے کوئی فرق واقع نہیں ہوتا

یعنی $$\frac{\text{جف}^2\,\text{ف}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^2\,\text{ف}}{\text{جف ما جف لا}}$$

(۶۱) $\text{ی} = \text{جب}\,(\text{لا} + \text{ما})$ (۶۲) $\text{ی} = \frac{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}{\text{لا}^2 - \text{ما}^2}$

(۶۳) $\text{ی} = \text{مس}^{-1}\,\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ (۶۴) $\text{د} = \text{جب}^2\,(\text{طہ}^2\,\text{ما}^2)$

(۶۵) اگر $\text{د} = ۶\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{ما}^2\,\text{ی} + ۳\,\text{و}^{\text{ما}}\,\text{لا}^2\,\text{ی}^2 + ۲\,\text{و}^{\text{ی}}\,\text{لا}^3\,\text{ما} - \text{لا ما ی}$

تو $$\frac{\text{جف}^4\,\text{د}}{\text{جف لا}^2\,\text{جف ما جف ی}} = ۱۲\,(\text{و}^{\text{لا}}\,\text{ما} + \text{و}^{\text{ما}}\,\text{ی} + \text{و}^{\text{ی}}\,\text{لا})$$

(۶۶) اگر $\text{د} = (\text{ما ی})^2\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{۲}} + (\text{ی لا})^2\,\text{و}^{\frac{\text{ما}}{۲}} + (\text{لا ما})^2\,\text{و}^{\frac{\text{ی}}{۲}}$

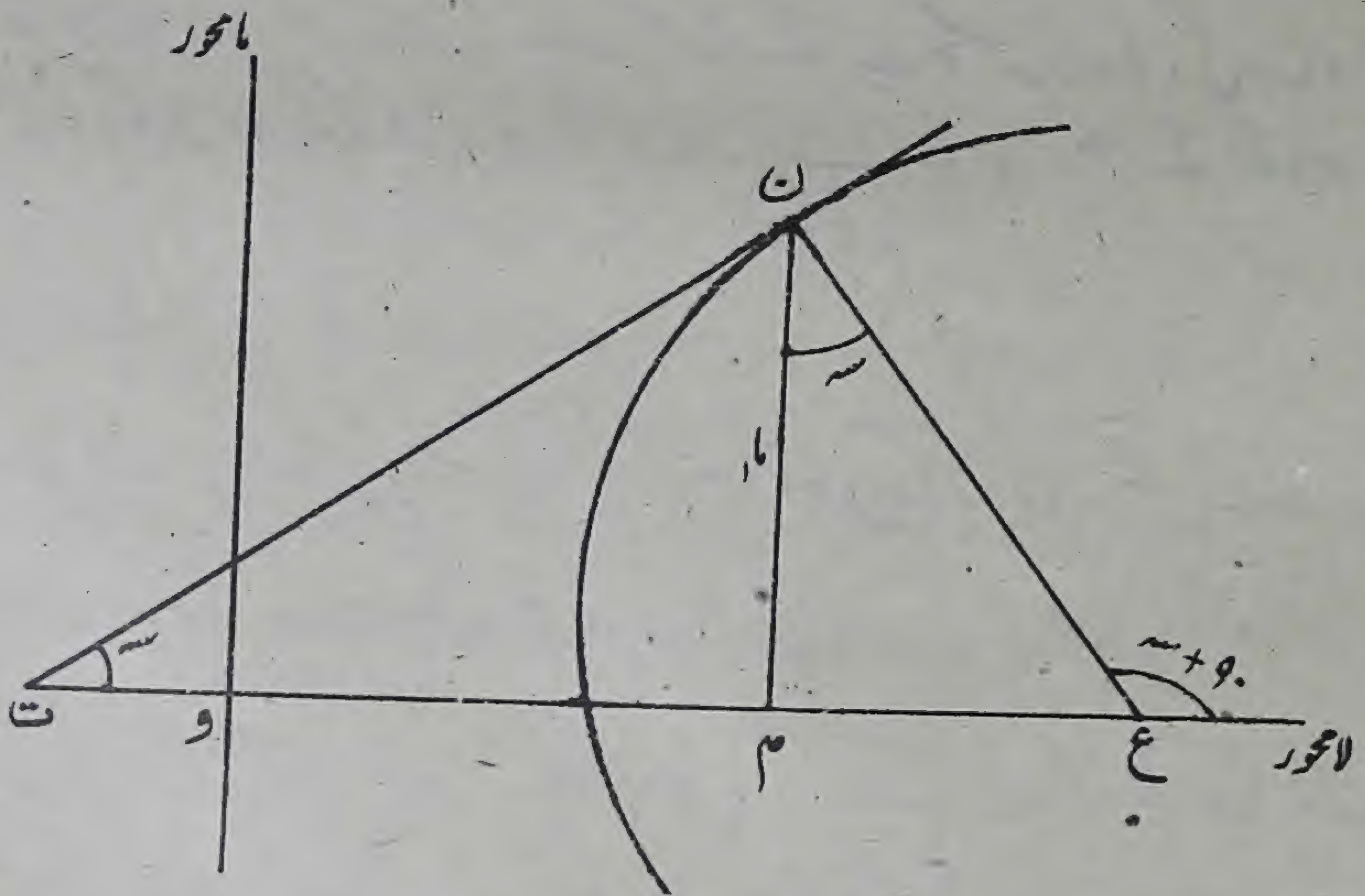
تو $$\frac{\text{جف}^6\,\text{د}}{\text{جف لا}^2\,\text{جف ما}^2\,\text{جف ی}^2} = \text{و}^{\frac{\text{لا}}{۲}} + \text{و}^{\frac{\text{ما}}{۲}} + \text{و}^{\frac{\text{ی}}{۲}}$$

باب چہارم

تفرقی سر کے اطلاقات

۴٫۱ :- گذشتہ باب میں تفرق اور تکمل کرنے کا عمل بتایا گیا ہے اور یہ بھی بتایا گیا ہے کہ علم ہندسہ میں تفرقی سر منحنی کے ڈھال کو تعبیر کرتا ہے اور طبیعی سوالوں میں بدلنے کی شرح کو ۔ اس باب میں اس تعبیر کی وجہ سے ہندسی اور طبیعی سوالوں کے حل کرنے میں جس قدر سہولتیں ہوتی ہیں ان کا کچھ ذکر کیا جائیگا ۔ مضامین احصائی ہندسہ اور طبیعیاتی ریاضی کا پورا دارو مدار تفرقی سر پر ہے ۔

۴٫۲ :- منحنی کا ڈھال ، مماس اور عماد کی مساواتیں ، وغیرہ :-

شکل میں نقطہ ن (لا۱، ما۱) پر منحنی کا مماس ن ت دکھایا گیا ہے۔ یہ لا محور سے نقطہ ت پر ملتا ہے اور لا محور کی مثبت سمت سے زاویہ سہ بناتا ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ مس سہ = $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)$ جبکہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ میں نقطہ ن کے محدد درج کر دیے گئے ہیں۔ اس امر کو علامتوں میں $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)_{\text{لا=لا}_1\text{، ما=ما}_1}$ یا $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1}$ یا $\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)$ سے تعبیر کرتے ہیں اور مس سہ یا $\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1}$ کو نقطہ ن پر منحنی کا ڈھال کہتے ہیں۔
تحلیلی ہندسہ سے طالب علم کو معلوم ہے کہ مماس ن ت کی مساوات ہوگی

$$(\text{ما} - \text{ما}_1) = \text{مس سہ} \times (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

$$= \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1} \times (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

اسی طرح عماد ن ع کی مساوات ہوگی $(\text{ما} - \text{ما}_1) = -\,\text{مم سہ} \times (\text{لا} - \text{لا}_1)$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1}} (\text{لا} - \text{لا}_1)$$

یعنی $(\text{ما} - \text{ما}_1)\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)_{\text{لا}_1\text{ما}_1} + (\text{لا} - \text{لا}_1) = ۰$

اب نقاط ت اور ع کے محدد دریافت کرنے کے لیے مماس اور عماد کی مساواتوں میں ما = ۰ رکھو تو ت کے محدد ہونگے $\left(\text{لا}_1 - \frac{\text{ما}_1}{\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)}،\ ۰\right)$ اور ع کے محدد ہونگے

$$\left[\text{لا}_1 - \text{ما}_1\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)،\ ۰\right]$$

ن ت کو مماس کا طول اور ن ع کو عماد کا طول کہتے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ

مماس کا طول ن ت = ن م × قم سہ = ما۱ قم سہ

$$= \text{ما}_1 \times \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2}} = \text{ما}_1 \times \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر لا}_1}{\text{فر ما}_1}\right)^2}$$

اور عماد کا طول ن ع = ن م قط سہ = ما قط سہ = ما × $\sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{۲}}$

ماس اور عماد کے لا محور پر ظلوں کو بالترتیب زیر ماس اور زیر عماد کہتے ہیں۔

پس زیر ماس م ت = ن م × مم سہ = ما مم سہ = $\frac{\text{ما}}{\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)}$ = ما $\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)$

اور زیر عماد م ع = ن م × مس سہ = ما مس سہ = ما $\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)$

مثال (۱)۔ مکافی ما = ۲لا − لا^{۲} کے ماس کا ڈھال مبدا اور لا = $\frac{۳}{۲}$ والے نقطوں پر دریافت کرو۔ نیز بتاؤ کن نقطوں پر ماس لا محور سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اور کہاں لا محور کے متوازی ہے۔

ما = ۲لا − لا^{۲}

تفرق کرنے سے

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۲ − ۲لا

اس لیے مبدا پر ڈھال = ۲ اور لا = $\frac{۳}{۲}$ والے نقطے پر ڈھال = − ۱

نیز اگر ماس ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے تو ڈھال = مس ۴۵° = ۱

∴ ۱ = ۲ − ۲لا ∴ لا = $\frac{۱}{۲}$

∴ نقطہ ($\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۴}$) پر ماس لا محور سے ۴۵° کا زاویہ بنائیگا۔

اور لا محور سے متوازی ہونے کے لیے ڈھال = مس ۰ = ۰ = ۲ − ۲لا ∴ لا = ۱

اور نقطہ (۱، ۱) پر منحنی کا ماس لا محور کے متوازی ہوگا۔

مثال (۲)۔ مکافی ما^{۲} = ۴لا − ۵ کے کسی نقطہ پر منحنی کا ڈھال اور ماس، عماد، زیر ماس اور زیر عماد کے طول دریافت کرو۔

تفرق کرنے سے ۲ما $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۴ ∴ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = $\frac{۲}{\text{ما}}$

اس لیے کسی نقطہ پر ڈھال $\frac{۲}{\text{ما}}$ ہے اور زاویہ ماس مس$^{-۱}$ $\left(\frac{۲}{\text{ما}}\right)$

$$\text{مماس کا طول} = \text{ما} \times \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^۲} = \text{ما} \times \sqrt{۱ + \frac{\text{ما}^۲}{۴}}$$

$$\text{اور عماد کا طول} = \text{ما} \times \sqrt{۱ + \frac{۴}{\text{ما}^۲}} = \sqrt{\text{ما}^۲ + ۴}$$

$$\text{زیر مماس کا طول} = \text{ما} \times \frac{\text{ما}}{۲} = \frac{\text{ما}^۲}{۲}$$

$$\text{زیر عماد کا طول} = \text{ما} \times \frac{۲}{\text{ما}} = ۲$$

مثال (۳) — وہ منحنی دریافت کرو جس کے زیر مماس کا طول فصلہ کے متناسب ہو۔
منحنی کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے $\text{ما} \, \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} \propto \text{لا}$

فرض کرو کہ $\text{ما} \, \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{ک لا}$ جہاں ک دیا ہوا مستقل ہے۔

تو $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \int \text{ک} \, \frac{\text{فرما}}{\text{ما}}$ اور تکمل کرنے سے

$$\text{لوک لا} = \text{ک لوک ما} + \text{مستقل}$$

$\therefore \text{لا} = \text{ج ما}^{\text{ک}}$ جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔ بالخصوص اگر ک کی قیمت (−۱) ہو تو یہ منحنی قائم زائد ہوگا۔

مثال (۴) — وہ منحنی دریافت کرو جس کے زیر عماد کا طول ک کے مساوی ہے اور جو مبدا دیں سے گزرتا ہے۔ ایسے منحنیوں کی تفرقی مساوات ہوگی۔

$$\text{ما} \sqrt{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲} = \text{ک}$$

$$\therefore ۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ = \frac{\text{ک}^۲}{\text{ما}^۲}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \pm \sqrt{\frac{\text{ک}^۲ - \text{ما}^۲}{\text{ما}^۲}}$$

$$\therefore \int \text{فرلا} = \pm \int \frac{\text{ما فرما}}{\sqrt{\text{ک}^۲ - \text{ما}^۲}}$$

اور تکمل کرنے سے $\pm\sqrt{ا^{۲} - ما^{۲}} = لا + ج$ جہاں ج اختیاری مستقل ہے

اب مربع لینے سے $ما^{۲} + (لا + ج)^{۲} = ا^{۲}$ جو دائروں کو تعبیر کرتا ہے۔
اب ج کی قیمت دریافت کرنے کے لیے ہمیں معلوم ہے کہ دائرہ مبداء میں سے گزرتا ہے۔

اس لیے $۰ + (۰ + ج)^{۲} = ا^{۲}$ یعنی $ج = \pm ا$

یعنی $ما^{۲} + (لا \pm ا)^{۲} = ا^{۲}$ مطلوبہ دائرہ ہے۔

مشقی سوالات ۲۱

(۱) منحنی $ما = لا^{۳} - ۳لا^{۲} + ۷لا + ۱$ کے نقاط $لا = ۱، -\frac{۳}{۲}$ اور ۲ پر منحنی کا ڈھال اور مماس کا لا محور سے زاویہ سہ دریافت کرو۔

(۲) منحنی $(۱ + لا^{۲})ما - لا = ۰$ کا ڈھال اور سہ کی قیمت مبداء پر دریافت کرو۔

(۳) بتاؤ کہ منحنی $ما^{۲} - ۲لا^{۳} = ۰$ کے کس نقطہ پر ڈھال ۳ ہے نیز کس نقطہ پر $سہ = ۴۵^{\circ}$

(۴) بتاؤ کہ کن نقطوں پر منحنی $ما + ۳لا^{۲} = لا^{۳} - ۹لا + ۵$ کا مماس محور لا کے متوازی ہے۔

(۵) ذیل کے منحنیوں کے دیے ہوئے نقطوں پر مماس اور عماد کی مساواتیں اور زیر مماس اور زیر عماد کا طول محسوب کرو۔

(ا) $لا^{۲} + ۴ما^{۲} = ۲۵$ کے نقطہ (۳، ۲) پر

(ب) $لا^{۲} + ما^{۲} = ر^{۲}$ کے نقطہ (رجم طہ، رجب طہ) پر

(ج) $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کے نقطہ $(\frac{ا}{\sqrt{۲}}، \frac{ب}{\sqrt{۲}})$ پر

(۶) $ما^{۲} = ۸لا$ کے نقطہ (۲، ۴) پر کے مماس، عماد اور محور لا سے جو مثلث

بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۷) ما = لا^{۳} کے نقطہ (۳، ۲۷) پر کے مماس اور حوالے کے محوروں سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۸) ما = لا^{۳} - ۵ لا + ۷ کے ان نقاط پر کے مماسوں کا نقطۂ تقاطع دریافت کرو جن کے فصلے بالترتیب -۲ اور ۳ ہیں۔

(۹) ما = لا^{۲} - ۴ لا + ۱ کے ان نقاط پر کے مماسوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو جن کے فصلے بالترتیب ۱ اور ۳ ہیں۔

(۱۰) ما = لا^{۳} - ۲ لا^{۲} + لا - ۲ کے کتنے مماس خط ۷ لا - ۴ ما + ۲۸ = ۰ کے متوازی ہیں ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

(۱۱) لا^{۲} + لا ما + ما^{۲} = ۴ کے افقی اور انتصابی مماسوں کے نقاط تماس معلوم کرو۔

(۱۲) ۴ لا^{۲} - ما^{۲} = ۳۶ کے ان مماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو ۲ لا + ۵ ما = ۴ پر علی القوائم ہیں۔

(۱۳) ناقص $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ پر وہ نقطہ معلوم کرو جس کا مماس محور اعظم اور محور اصغر کے سروں کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔

(۱۴) ما^{۲} = ۲ع لا میں ثابت کرو کہ زیر عماد کی تنصیف راس پر ہوتی ہے اور زیر عماد کا طول ع ہے۔

(۱۵) وہ منحنیات دریافت کرو جن کا (ا) زیر مماس کا طول مستقل ہے۔
(ب) زیر عماد کا طول مستقل ہے۔
(ج) مماس کا طول مستقل ہوتا ہے۔
(د) عماد کا طول مستقل ہوتا ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ ما = ۲ لا - ۱ منحنی ما = لا^{۴} + ۲ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۲ لا + ۳ کو دو علیحدہ علیحدہ نقاط پر مس کرتا ہے۔

(۱۷) ثابت کرو کہ ما = ۳ لا - ۱ منحنی ما = لا^{۳} - لا + ۱ کا مماس ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ خط $\frac{لا}{د} + \frac{ما}{ب} = ۲$ منحنی $\left(\frac{لا}{د}\right)^{ن} + \left(\frac{ما}{ب}\right)^{ن} = ۲$

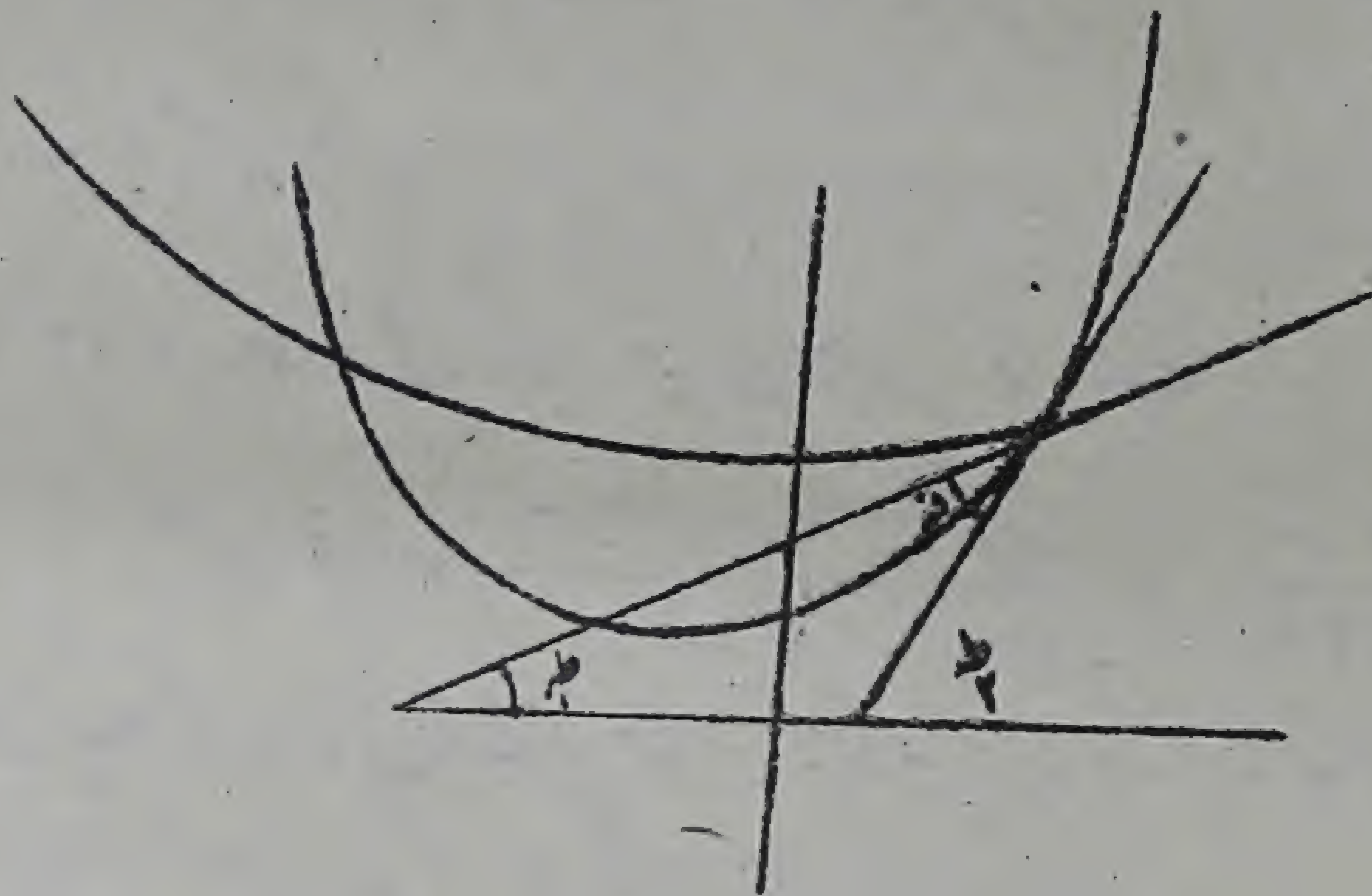
کو ن کی ہر قیمت کے لیے نقطہ (د، ب) پہ مس کرتا ہے۔

(۱۹) منحنی ما = ب جب $\frac{لا}{د}$ میں ثابت کرو کہ زیر مماس = د مس $\frac{لا}{د}$

اور زیر عماد $\frac{ب^{۲}}{۲د}$ جب $\frac{۲لا}{د}$ اور عماد کا طول ب جب $\frac{لا}{د} \times \sqrt{۱ + \frac{ب^{۲}}{د^{۲}} جم^{۲} \frac{لا}{د}}$ ہے۔

(۲۰) بتاؤ کہ منحنی ما = ۴لا^{۲} ـ ۵لا + ۱۲ اور ۳لا^{۲} = ۷لا + ما ـ ۱۵

ایک دوسرے کو کن نقطوں پر کاٹتے ہیں اور ان نقطوں پر دونوں منحنیوں کے مماسوں میں کیا زاویہ ہے۔

منحنی ما = ۴لا^{۲} ـ ۵لا + ۱۲ اور ۳لا^{۲} = ۷لا + ما ـ ۱۵ میں سے ما ساقط کر دو یعنی ایک مساوات سے ما کی قیمت نکال کر دوسری مساوات میں درج کر دو۔

پس ۳لا^{۲} = ۷لا + (۴لا^{۲} ـ ۵لا + ۱۲) ـ ۱۵

= ۷لا + ۴لا^{۲} ـ ۵لا + ۱۲ ـ ۱۵

∴ لا^{۲} + ۲لا ـ ۳ = ۰ ∴ (لا + ۳)(لا ـ ۱) = ۰

∴ لا = ـ۳، ۱

اس لیے نقاطِ تقاطع کے محدد ہیں (۱، ۱۱) اور (ـ۳، ۶۳)

شکل میں دو منحنی دکھائے گئے ہیں - ان کے ماس بالترتیب لا محور سے زاویہ طہ۱ اور طہ۲ بناتے اور نقطۂ تقاطع پر ماسوں کے درمیان زاویہ فہ ہے۔
ظاہر ہے کہ فہ = طہ۲ - طہ۱

∴ مس فہ = مس (طہ۲ - طہ۱) = (مس طہ۲ - مس طہ۱) / (۱ + مس طہ۲ مس طہ۱)

اب مس طہ۱ اور مس طہ۲ کی قیمتیں معلوم ہیں اور اس سے مس فہ کی قیمت نکل سکتی ہے۔
اس سوال میں پہلے منحنی کے لیے

فر ما / فر لا = ۸ لا - ۵ اور نقاطِ تقاطع پر اس کی قیمت ہے ۳ اور -۲۹

دوسرے منحنی کے لیے

فر ما / فر لا = ۶ لا - ۷ اور نقاطِ تقاطع پر اس کی قیمت ہے -۱ اور -۲۵

پس نقطہ (۱، ۱) پر ماسوں کے درمیان زاویہ فہ۱ ہے

مس فہ۱ = (۳ - (-۱)) / (۱ + (۳)(-۱)) = -۴ / (۱ - ۳) = +۲

اور نقطہ (-۳، ۶۳) پر ماسوں کے درمیان زاویہ فہ۲ ہے

مس فہ۲ = (-۲۵ - (-۲۹)) / (۱ + (-۲۹)(-۲۵)) = +۴ / ۷۲۶

واضح رہے کہ ماسوں کے درمیان زاویہ فہ یا ۱۸۰ - فہ لیا جا سکتا ہے۔
اس لیے علامت کا تعین بغیر ترسیم کھینچے نہیں ہو سکتا۔

(۲۱) ذیل کے منحنیوں کے تقاطع کے زاویے محسوب کرو:-

(ا) لا۲ + ما۲ - ۴ لا = ۱ اور لا۲ + ما۲ - ۲ ما = ۹

(ب) ۴ ما = ۲ لا۲ - ۳ لا اور ۴ ما = لا۲ + ۴

(ج) لا۲ + ما۲ = ۴۵ اور ما۲ = ۱۲ لا

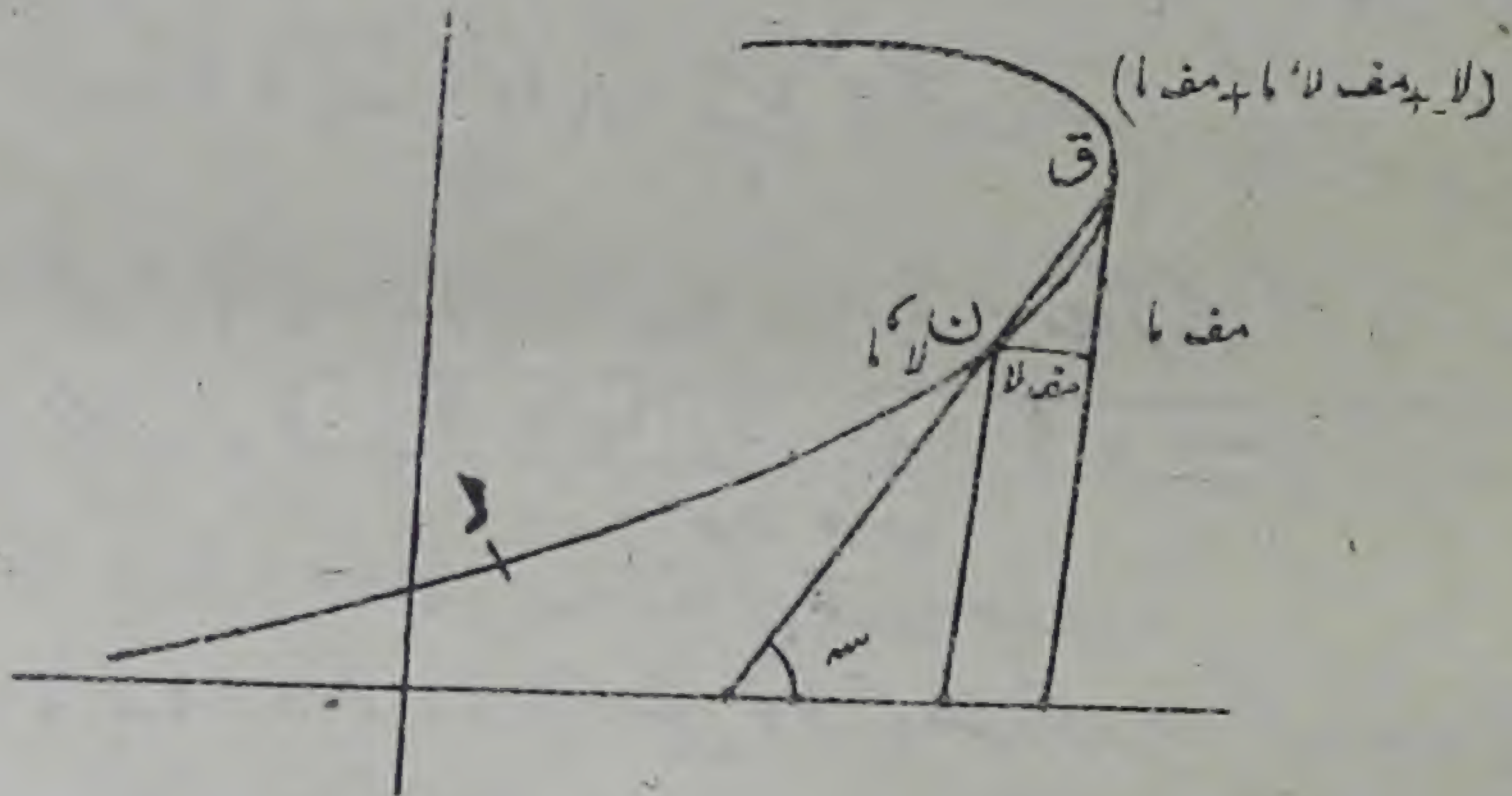
(۲۲) ثابت کرو کہ لا۲ - ما۲ = ۵ اور ۴ لا۲ + ۹ ما۲ = ۷۲، علی القوائم

قطع کرتے ہیں ۔

(۲۳) ثابت کرو کہ $لا^2 + ما^2 = ۸$ لا اور $ما^2 = \frac{لا^3}{۲ا - لا}$ ایک دوسرے کو مبداء پر علی القوائم قطع کرتے ہیں اور دوسرے دو نقطوں پر ۴۵° کے زاویہ پر قطع کرتے ہیں ۔

۴،۲۵ :- منحنی کے قوس کا طول

:- ایک سیدھے خط کے طول کے مفہوم سے طالب علم خوب واقف ہے ۔ لیکن منحنی کے قوس کا طول اس قدر آسان نہیں ہے ۔ اس کی ایک تعریف یوں ہو سکتی ہے کہ منحنی کے قوس کو چھوٹے چھوٹے قوسوں میں تقسیم کر دیا جائے اور ان قوسوں کے وتروں کو ناپ لیا جائے ۔ تب وتروں کے طولوں کے مجموعے کی انتہا کو جب چھوٹے قوسوں کی تعداد بہت بڑھا دی جائے، قوس کا طول کہینگے ۔ لیکن اس تعریف میں چند مشکلات ہیں جن کا اس ابتدائی کتاب میں ذکر نہیں ہو سکتا ۔ شکل سے واضح ہے کہ $(\text{وتر ن ق})^2 = (\text{مف لا})^2 + (\text{مف ما})^2$

(لا + مف لا، ما + مف ما)
ق
ن
لا، ما
مف ما
مف لا
ا
س

اب کسی نقطہ ا سے شروع کرکے ان کے قوس کا طول س سے تعبیر ہو تو قوس ن ق کا طول مف س سے تعبیر ہوگا ۔

$$(\text{مف س})^2 \times \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{مف س}}\right)^2 = (\text{مف لا})^2 + (\text{مف ما})^2$$

یعنی $\left(\frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}}\right)^{\text{۲}} \times \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{مف س}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} + \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\right)^{\text{۲}}$

اب مف لا بے حد چھوٹا کر دیا جائے اور مذکورۂ بالا تعریف کے مطابق قوس کا طول وجود رکھتا ہو یعنی انتہا ہیں جبکہ مف لا ← ۰ ، وتر اور قوس کا طول مساوی ہو تو

$\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{مف س}}$ کی انتہا ایک ہوگی

اور $\left(\frac{\text{فس}}{\text{فلا}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} + \left(\frac{\text{فما}}{\text{فلا}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} + \text{مس}^{\text{۲}}\,\text{سہ} = \text{قط}^{\text{۲}}\,\text{سہ}$

اس لیے $\text{جم سہ} = \frac{\text{فلا}}{\text{فس}}$ اور $\text{جب سہ} = \frac{\text{فما}}{\text{فس}}$

مثال (۱) منحنی $\text{۳ ما} = \text{لا}^{\text{۲}} + \text{۲}$ کے نقطہ (۲، ۲) پر $\frac{\text{فس}}{\text{فلا}}$ اور $\frac{\text{فس}}{\text{فما}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

اب $\left(\frac{\text{فس}}{\text{فلا}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} + \left(\frac{\text{۲ لا}}{\text{۳}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} + \left(\frac{\text{۴}}{\text{۳}}\right)^{\text{۲}} = \frac{\text{۲۵}}{\text{۹}} \therefore \frac{\text{فس}}{\text{فلا}} = \frac{\text{۵}}{\text{۳}}$

اور $\left(\frac{\text{فس}}{\text{فما}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} + \left(\frac{\text{فلا}}{\text{فما}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} + \left(\frac{\text{۳}}{\text{۲ لا}}\right)^{\text{۲}} = \text{۱} + \left(\frac{\text{۳}}{\text{۴}}\right)^{\text{۲}} = \frac{\text{۲۵}}{\text{۹}} \therefore \frac{\text{فس}}{\text{فما}} = \frac{\text{۵}}{\text{۴}}$

(۲) $\text{ما}^{\text{۲}} = \text{۴ ا لا}$ میں $\frac{\text{فس}}{\text{فلا}}$ اور $\frac{\text{فس}}{\text{فما}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۳) منحنی $\text{ا لا}^{\text{۲}} + \text{۲ ہ لا ما} + \text{ب ما}^{\text{۲}} = \text{۱}$ میں ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فس}}{\text{فلا}} = \frac{\sqrt{(\text{ہ}^{\text{۲}} - \text{ا ب})(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{ما}^{\text{۲}}) + (\text{ا} + \text{ب})}}{\text{ہ لا} + \text{ب ما}}$$

(۴) $\text{لا}^{\text{۳}} + \text{ما}^{\text{۳}} = \text{۳ ا لا ما}$ میں $\frac{\text{فس}}{\text{فما}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

(۵) $\text{ما}^{\text{۲}} = \text{۲ ا لا}$ میں اس قوس کا طول معلوم کرو جو راس اور وتر خاص کے سروں کے درمیان ہے۔

(۶) $\text{ما}^{\text{۲}} = \text{لا}^{\text{۳}}$ میں لا = ۰ اور $\text{لا} = \frac{\text{۵}}{\text{۹}}$ کے درمیان قوس کا طول محسوب کرو۔

(۷) $\text{۶ ما} = \text{لا}^{\text{۲}}$ میں مبداء اور $\left(\text{۴}،\ \frac{\text{۸}}{\text{۳}}\right)$ کے درمیان قوس کا طول معلوم کرو۔

۴،۳ :- منحنی کی تبدل مساوات :- بالعموم منحنی کی مساوات $\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})$ کی شکل میں دی جاتی ہے۔ اس میں یہ سہولت ہے کہ لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی قیمت بہ آسانی نکل سکتی ہے۔ لیکن اگر منحنی تضمینی تفاعل سے بیان ہو یعنی $\text{ف}(\text{لا}، \text{ما}) = 0$ تو لا کی قیمت کے جواب میں ما کی قیمت نکالنے کے لیے ایک مساوات کو حل کرنا پڑیگا۔ اس قسم کی بعض مساواتوں میں متغیروں کو ایک دیگر تبدل کی رقوم میں بیان کیا جا سکتا ہے۔ مثلاً $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ل}^2$ ایک دائرہ کی مساوات ہے اور اس کے محدد لا، ما کو $\text{لا} = \text{ل جم طہ}$، $\text{ما} = \text{ل جب طہ}$ سے طہ کی رقوم میں بیان کر دیا ہے۔ اس متغیر طہ کو تبدل کہتے ہیں اور لا اور ما کی قیمتیں تبدل کی رقوم میں بیان ہیں۔ اب طہ کی کسی بھی قیمت کے جواب میں لا اور ما کی قیمت بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کی تبدل مساوات ہے $\text{لا} = \text{ل جم طہ}$، $\text{ما} = \text{ب جب طہ}$۔ نیز مکافی $\text{ما}^2 = 4\,\text{ل لا}$ کی تبدل مساوات ہے $\text{لا} = \text{ل ت}^2$، $\text{ما} = 2\,\text{ل ت}$ وغیرہ وغیرہ عام صورت میں تبدل مساوات ہو گی $\text{لا} = \text{ف}_1(\text{ط})$، $\text{ما} = \text{ف}_2(\text{ط})$ اور ان میں سے تبدل ط کو ساقط کرنے سے منحنی کی تضمینی کارتیزی مساوات حاصل ہو جائیگی۔

تبدل مساوات سے منحنی کا ڈھال نکالنے کے لیے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0،\ \text{مف ط}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ط}} \times \frac{\text{مف ط}}{\text{مف لا}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\frac{\text{مف ما}}{\text{مف ط}}}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ط}}}$$

اب اگر $\text{مف لا} \to 0$ تو لازماً $\text{مف ط} \to 0$ ہوگا

اس لیے
$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ط}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ط}}} = \frac{\frac{\text{فر}[\text{ف}_2(\text{ط})]}{\text{فر ط}}}{\frac{\text{فر}[\text{ف}_1(\text{ط})]}{\text{فر ط}}} = \frac{\text{ف}'_2(\text{ط})}{\text{ف}'_1(\text{ط})}$$

بعض سوالات میں قوس کے طول س کو تبدیل لینے سے بہت سہولت ہوتی ہے

نیز

$$\left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 = 1 + \frac{\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}}\right)^2}{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^2 \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}}\right)^2$$

مثال (۱) خط تدویر $\left.\begin{array}{l}\text{لا} = \text{ل}\,(\text{ط} + \text{جب ط})\\ \text{ما} = \text{ل}\,(1 - \text{جم ط})\end{array}\right\}$ کے مماس کا ڈھال دریافت کرو نیز قوس کے جلے حاصل کرو۔ اس منحنی کی کارتیزی مساوات بہت مشکل ہے۔

اب $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}} = \text{ل}\,(1 + \text{جم ط})$ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرط}} = \text{ل جب ط}$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جب ط}}{1 + \text{جم ط}} = \frac{2\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2}}{2\,\text{جم}^2\,\frac{\text{ط}}{2}} = \text{مس}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}}\right)^2 = \text{ل}^2\,(1 + \text{جم ط})^2 + \text{ل}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}$$

$$= 2\,\text{ل}^2 + 2\,\text{ل}^2\,\text{جم ط} = 2\,\text{ل}^2\,(1 + \text{جم ط})$$

$$= 4\,\text{ل}^2\,\text{جم}^2\,\frac{\text{ط}}{2}$$

$$\therefore \frac{\text{فس}}{\text{فرط}} = 2\,\text{ل}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

$$\therefore \text{س} = \int 2\,\text{ل}\,\text{جم}\,\frac{\text{ط}}{2}\,\text{فرط} = \text{مر} = 4\,\text{ل}\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{2}$$

مثال (۲) ذیل کے منحنیوں میں نقاط مطلوبہ پر مماس اور عماد کی مساواتیں اور زیر مماس اور زیر عماد کے طول محسوب کرو۔

(ا) لا = ت^۲، ا = ت^۳ نقطہ ت = ۱

(ب) لا = ۲ قوت، ا = قوت نقطہ ت = صفر

(۳) لا = ۴ ا جم^۳ طہ، ا = ۴ ا جب^۳ طہ کے کسی نقطہ (لا، ا) پر مماس، عماد زیرِ مماس اور زیرِ عماد کے طول معلوم کرو۔

(۴) لا = ا جم طہ، ا = ب جب طہ کے نقطہ طہ = π/۴ پر مماس اور عماد کی مساواتیں اور زیرِ مماس اور زیرِ عماد کے طول معلوم کرو۔

(۵) لا = ا (طہ - جب طہ)، ا = ا (۱ - جم طہ) کے اس قوس کا طول معلوم کرو جو طہ = صفر اور طہ = ۲π کے درمیان ہے۔

(۶) لا = ا جم طہ، ا = ا جب طہ میں طہ = ۰ سے طہ = π تک قوس کا طول محسوب کرو۔

(۷) ذیل کے منحنیوں کے لیے فر س/فر ت، جب سہ اور جم سہ کو ت کی رقوم میں بیان کرو۔

(ا) لا = ت + ۱، ا = ت^۲

(ب) لا = ت^۲ ا = ت^۳

۴ د ۴ :۔ قطبی محدّدوں میں منحنی کا ڈھال

:۔ فرض کرو کہ قطبی محدّدوں کا قطب م اور ابتدائی خط م لا ہے اور کسی منحنی ا ن ق ب پر دو متصل نقطے ن اور ق ہیں جن کے محدّد (ر، طہ) اور (ر + مف ر، طہ + مف طہ) ہیں۔ وتر ق ن کی انتہائی شکل جبکہ ق منحنی پر حرکت کرتے ہوئے نقطہ ن پر منطبق ہو جائے مماس ن ت ہوگا۔ فرض کرو کہ زاویہ ن ت لا = سہ اور زاویہ م ن ت = فہ کارٹیزی محدّدوں میں زاویہ سہ بہت اہم تھا لیکن قطبی محدّدوں میں مماس اور سمتی نیم قطر کا درمیانی زاویہ فہ اکثر ضابطوں میں استعمال ہوگا۔ یہ زاویہ فہ دراصل زاویہ عہ کی انتہائی

صورت ہے ۔ اب م ق پر ن ل عمود گراؤ ۔

مس ع = ن ل / ق ل = رجب (مف طہ) / (ر + مف ر ۔ رجم (مف طہ))

اس لیے مس فہ = نہا مس ع = نہا (مف طہ ← ۰) رجب (مف طہ) / (ر + مف ر ۔ رجم (مف طہ))

= نہا (مف طہ ← ۰) ر × (جب مف طہ / مف طہ) × مف طہ / (ر (۱ ۔ جم مف طہ) + مف ر)

= ر × ۱ × فر طہ / فر ر چونکہ ۱ ۔ جم مف طہ ← ۰

∴ مس فہ = ر فرطہ / فر ر

اور مس سہ = مس (فہ + طہ) = (مس فہ + مس طہ) / (۱ ۔ مس فہ مس طہ) = (ر فرطہ/فر ر + مس طہ) / (۱ ۔ ر فرطہ/فر ر × مس طہ)

نیز (وتر ن ق)^2 = (ن ل)^2 + (ل ق)^2

= (رجب مف طہ)^2 + (ر + مف ر ۔ رجم مف طہ)^2

$$\therefore \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^2 \left(\frac{\text{قوس ن ق}}{\text{مف طہ}}\right)^2 = \left(\frac{\text{ر جب مف طہ}}{\text{مف طہ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ر + مف ر - ر جم مف طہ}}{\text{مف طہ}}\right)^2$$

اب جیساکہ دفعہ ۲۵ و ۴۴ میں کارٹیزی محددوں کے لیے فرض کیا گیا ہے کہ منحنی کے قوس کا طول ناپا جاسکتا ہے اور انتہا میں قوس اور وتر کی نسبت ایک کے مساوی لی جاسکتی ہے تو نیز فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ ا سے ن تک قوس کا طول س ہے اور قوس ن ق کا طول مف س ہے۔

$$\underset{\text{مف طہ} \to 0}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}}\right)^2 \left(\frac{\text{قوس ن ق}}{\text{مف طہ}}\right)^2 = \underset{\text{مف طہ} \to 0}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{ر جب مف طہ}}{\text{مف طہ}}\right)^2 + \underset{\text{مف طہ} \to 0}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{ر + مف ر - ر جم مف طہ}}{\text{مف طہ}}\right)^2$$

$$\therefore 1 \times \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}\right)^2 = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فرطہ}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}\right)^2 = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فرطہ}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فر ر}} \times \frac{\text{فر ر}}{\text{فرطہ}}\right)^2 = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فرطہ}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فر ر}}\right)^2 = \text{ر}^2 \left(\frac{\text{فرطہ}}{\text{فر ر}}\right)^2 + 1$$

$$= 1 + \text{مس}^2\,\text{فہ} = \text{قط}^2\,\text{فہ}$$

$$\therefore \text{جم فہ} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فرس}} \quad \text{اور جب فہ} = \text{مس فہ جم فہ} = \text{ر}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرس}}$$

مثال (۱) $\text{ر} = \text{لا}\,(1 - \text{جم طہ})$ کے نقطہ $\text{طہ} = \frac{\pi}{2}$ پر منحنی کا ڈھال اور مماس اور نیم قطر کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

اگر نیم قطر اور مماس کے درمیان زاویہ فہ ہو تو

$$\text{مس فہ} = \text{ر}\,\frac{\text{فرطہ}}{\text{فر ر}} = \text{لا}\,(1 - \text{جم طہ}) \times \frac{1}{\text{لا جب طہ}} = \frac{1 - \text{جم طہ}}{\text{جب طہ}} = \frac{2\,\text{جب}^2 \frac{\text{طہ}}{2}}{2\,\text{جب}\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{جم}\frac{\text{طہ}}{2}} = \text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{2}$$

$$\therefore \text{فہ} = \frac{\text{طہ}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{اور مس سہ} = \text{مس}\,(\text{طہ} + \text{فہ}) = \text{مس}\,\frac{3\,\text{طہ}}{2} = \text{مس}\,\frac{3\pi}{4} = -1$$

مثال (۲) منحنی ر = ۴ جب ط + ۳ جم ط کے لیے $\frac{\text{ف س}}{\text{ف ط}}$ معلوم کرو۔

اب $\frac{\text{ف ر}}{\text{ف ط}}$ = ۴ جم ط ـ ۳ جب ط

∴ $\left(\frac{\text{ف س}}{\text{ف ط}}\right)^2 = \text{ر}^2 + \left(\frac{\text{ف ر}}{\text{ف ط}}\right)^2$ = (۴ جب ط + ۳ جم ط)^2 + (۴ جم ط ـ ۳ جب ط)^2

= ۱۶ + ۹ = ۲۵

∴ $\frac{\text{ف س}}{\text{ف ط}}$ = ۵

(۳) ذیل کے منحنیوں میں حسب معمول ترقیم مطلوبہ نقاط پر مس فہ اور مس سہ کی قیمتیں معلوم کرو:۔

(ا) ر = ا قط^2 ط ر = ۲ ا

(ب) ر = ا جب ۳ ط مبداء پر

(ج) ر^2 = ا^2 جب ۴ ط مبداء پر

(د) ر = ۲ جب ط + ۲ جم ط کے نقطہ ط = $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{2}$

(۴) ذیل کے منحنیوں کے لیے $\frac{\text{ف س}}{\text{ف ط}}$ کی قیمت ط کے رقوم میں حاصل کرو:۔

(ا) ر = ۵ جب ط + ۱۲ جم ط

(ب) ر = ۱ + جم ط

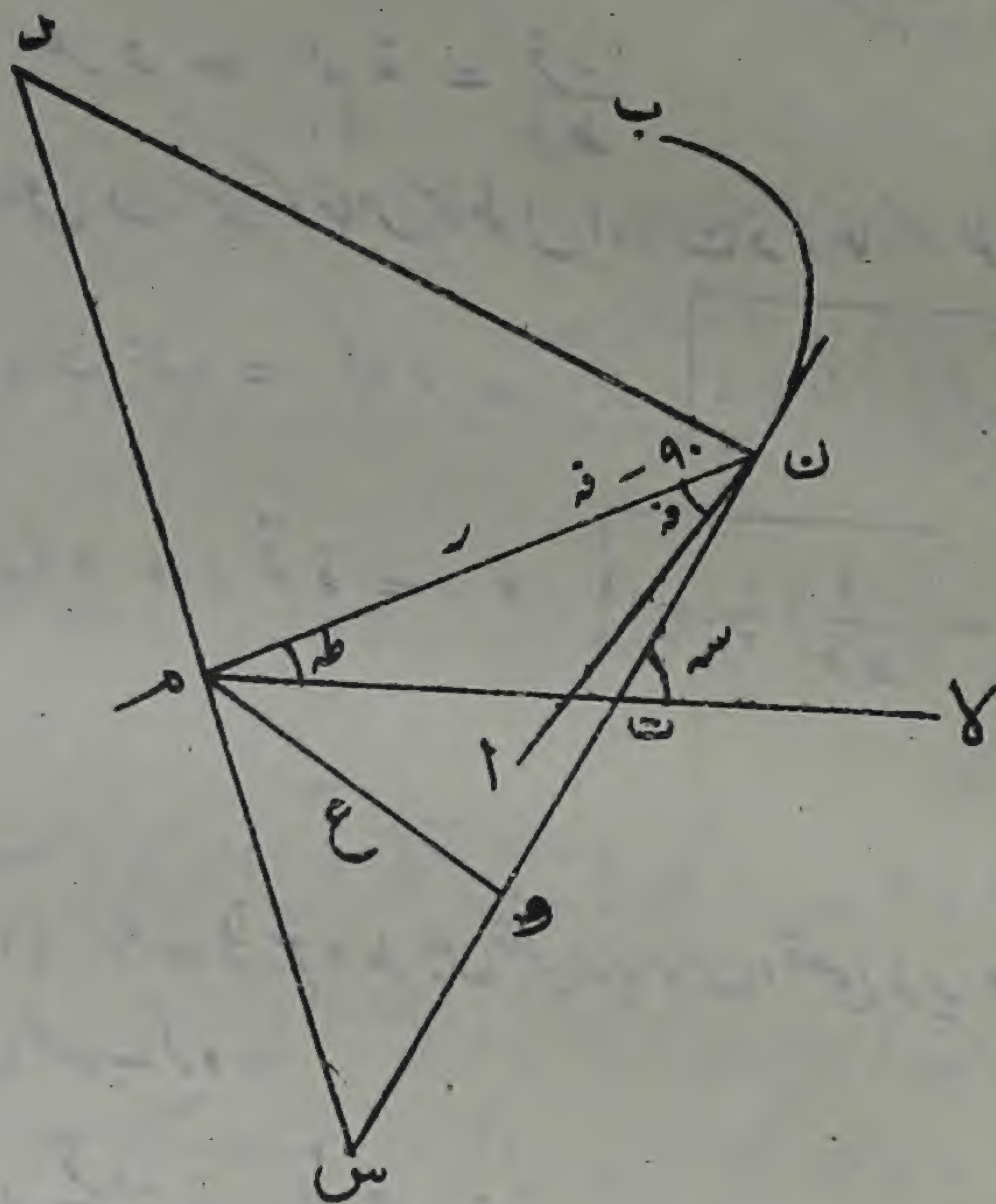
(ج) ر = ۲ جم ط ـ ۳ جب ط

(۵) ثابت کرو کہ ر = ا وطم عہ میں فہ مستقل ہے اور $\frac{\text{ف س}}{\text{ف ط}}$ = قم عہ

(۶) ثابت کرو کہ ر = ا ط میں مس فہ = ط

۴۵،۴ ۔ قطبی محددوں میں قطبی زیرِ مماس اور قطبی زیرِ عماد کا طول :۔

شکل میں منحنی ا ن ب کے نقطہ ن پر مماس ابتدائی خط مر لا سے

ت پر ملتا ہے۔ اور مماس پر مبدا م سے عمود م و کا طول ع ہے۔ اب م سے

سمتی نیم قطر م ن کے علی القوائم ایک خط ں م س کھینچو جو مماس ن ت سے س اور عماد ن ں سے ں پر ملے۔ خط م س کو قطبی زیر مماس اور خط م ں کو قطبی زیر عماد کہتے ہیں۔

$$\text{اب}\quad ع = ر\,\text{جب}\,فہ = ر\,\frac{\text{مس}\,فہ}{\text{قط}\,فہ} = \frac{ر^2\,\frac{فط}{فر}}{\sqrt{1 + ر^2\left(\frac{فط}{فر}\right)^2}}$$

$$\therefore \frac{1}{ع^2} = \frac{1 + ر^2\left(\frac{فط}{فر}\right)^2}{ر^4\left(\frac{فط}{فر}\right)^2} = \frac{1}{ر^2} + \frac{1}{ر^4}\left(\frac{فر}{فط}\right)^2$$

اور اگر $\frac{1}{ر} = ی$ رکھا جائے تو $\frac{فی}{فط} = \frac{ف\frac{1}{ر}}{فط} = -\frac{1}{ر^2}\,\frac{فر}{فط}$

$$\therefore \frac{1}{ع^2} = ی^2 + \left(\frac{فی}{فط}\right)^2$$

اور قطبی زیرِ ماس $\text{م س} = \text{ر مس فہ} = \text{ر}^2 \frac{\text{فطہ}}{\text{فر}}$

اور قطبی زیر عماد $\text{م د} = \text{ر مم فہ} = \frac{\text{فر}}{\text{فطہ}}$

اس ترقیم کے مطابق ن س کو ماس کا طول اور ن د کو عماد کا طول کہہ سکتے ہیں۔

ماس کا طول $\text{ن س} = \text{ر قط فہ} = \text{ر} \times \sqrt{1 + \text{ر}^2 \left(\frac{\text{فطہ}}{\text{فر}}\right)^2} = \text{ر} \frac{\text{فس}}{\text{فر}}$

اور عماد کا طول $\text{ن د} = \text{ر قم فہ} = \text{ر} \times \sqrt{1 + \frac{1}{\text{ر}^2}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فطہ}}\right)^2} = \sqrt{\text{ر}^2 + \left(\frac{\text{فر}}{\text{فطہ}}\right)^2}$

$= \frac{\text{فس}}{\text{فطہ}}$

مثال (۱) $\text{ر}^2 = \text{ا}^2 \text{ جم ۲طہ}$ میں قطبی زیر ماس، قطبی زیر عماد اور مبداء سے ماس پر عمود کا طول محسوب کرو۔

تفرق کرنے سے $\text{ر} \frac{\text{فر}}{\text{فطہ}} = -\text{ا}^2 \text{ جب ۲طہ}$

$\therefore$ قطبی زیر ماس $= \text{ر}^2 \frac{\text{فطہ}}{\text{فر}} = \text{ر}^2 \times \frac{\text{ر}}{-\text{ا}^2 \text{ جب ۲طہ}} = \frac{-\text{ا}^3 (\text{جم ۲طہ})^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^2 \text{ جب ۲طہ}}$

$= -\text{ا مم ۲طہ} \sqrt{\text{جم ۲طہ}}$

قطبی زیر عماد $\frac{\text{فر}}{\text{فطہ}} = -\frac{\text{ا}^2 \text{ جب ۲طہ}}{\text{ا} \sqrt{\text{جم ۲طہ}}} = -\text{ا جب ۲طہ} \sqrt{\text{قط ۲طہ}}$

ماس پر عمود کا طول ع ہو تو $\frac{1}{\text{ع}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} \text{قط ۲طہ} + \frac{\text{ا}^4 \text{ جب}^2 \text{ ۲طہ}}{\text{ا}^6 \text{ جم}^3 \text{ ۲طہ}} = \frac{1}{\text{ا}^2} (\text{قط ۲طہ} + \text{مس}^2 \text{ ۲طہ قط ۲طہ})$

$= \frac{1}{\text{ا}^2} \text{قط}^3 \text{ ۲طہ}$

$\therefore \text{ع} = \text{ا جم}^{\frac{3}{2}} \text{ ۲طہ}$

(۲) ذیل کے منحنیوں میں قطبی ماس، قطبی عماد، قطبی زیر ماس، قطبی زیر عماد اور ماس پر مبداء سے عمود کا طول محسوب کرو۔

(ا) ر = ا طہ

(ب) ر = $\frac{\text{ا}}{\text{طہ}}$

(ج) ر طہ = ا

(۳) ثابت کرو کہ منحنیات ر = ا (۱ + جم طہ) اور ر = ا (۱ - جم طہ) ایک دوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں۔

(۴) منحنیات ر جم^{2} $\frac{\text{طہ}}{2}$ = ا اور ر جب طہ = ۲ ا میں زاویۂ تقاطع دریافت کرو۔

(۵) منحنیات ر^{2} جب ۲ طہ = ا^{2} اور ر^{2} = ب^{2} قطا ۲ طہ میں زاویۂ تقاطع دریافت کرو۔

۶٫۴ - الجبرا میں تفرقی سر کا استعمال:-

مساوات ف (لا) = ا$_{0}$ لا$^{\text{ن}}$ + ا$_{1}$ لا$^{\text{ن}-1}$ + ... + ا$_{\text{ن}}$ = ۰ کو ن ویں رتبہ کی جبریہ مساوات کہتے ہیں۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو اور ا$_{0}$، ا$_{1}$ ... ا$_{\text{ن}}$ حقیقی مقداریں ہوں تو اس مساوات کی ٹھیک ن اصلیں وجود رکھتی ہیں۔ لیکن ہر سوال میں ان اصلوں کی قیمت نہیں نکالی جاسکتی۔ پہلے رتبہ کی مساوات سے چوتھے رتبہ کی عام مساوات کو ہر صورت میں حل کیا جاسکتا ہے۔ اس سے اعلیٰ رتبہ کی مساوات کو عام صورت میں حل نہیں کیا جاسکتا۔ بلکہ ایک بڑے ریاضی دان نے ثابت کر دیا ہے کہ اس کا امکان بھی نہیں۔ البتہ اگر کسی مساوات کی کوئی اصل مکرر ہو یعنی دو یا زیادہ اصلیں مساوی ہوں تو ان مساوی اصلوں کو بہ آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اب اگر لا = عہ مساوات ف (لا) = ۰ کی ر رتبہ کی اصل ہو تو مسئلہ باقی سے ظاہر ہے کہ

صفر = ف (لا) = (لا - عہ)$^{\text{ر}}$ فہ (لا) جہاں فہ (عہ) ≠ صفر

اس کو تفرق کرنے سے

فَ (لا) = ر (لا - عہ)$^{\text{ر}-1}$ فہ (لا) + (لا - عہ)$^{\text{ر}}$ فہَ (لا) = ۰

∴ فَ (لا) = (لا - ھ)$^{ر-۱}$ [ر فہ (لا) + (لا - ھ) فہَ (لا)] = ۰

پس لا = ھ مساوات فَ (لا) = ۰ کی (ر - ۱) - رتبہ کی اصل ہے - اس لیے اگر ف (لا) اور فَ (لا) کا عاد اعظم نکالا جائے تو تمام مکرر اصلیں عاد اعظم میں شریک ہونگی اور اس طرح ان کی قیمت نکل آئیگی -

مثال (۱) — مساوات لا^{۴} - لا^{۳} - ۷ لا^{۲} + ۸ لا + ۴ = ۰ کو حل کرو -

ف (لا) = لا^{۴} - لا^{۳} - ۷ لا^{۲} + ۸ لا + ۴ = ۰

∴ فَ (لا) = ۴ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۱۴ لا + ۸

اب ۴ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۱۴ لا + ۸) ۴ لا^{۴} - ۴ لا^{۳} - ۲۸ لا^{۲} + ۳۲ لا + ۱۶ (لا

۴ لا^{۴} - ۳ لا^{۳} - ۱۴ لا^{۲} + ۸ لا

− لا^{۳} - ۱۴ لا^{۲} + ۲۴ لا + ۱۶

اب - ۴ سے ضرب دینے سے

۴ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۱۴ لا + ۸) ۴ لا^{۳} + ۵۶ لا^{۲} - ۹۶ لا - ۶۴ (۱

۴ لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۱۴ لا + ۸

۵۹ لا^{۲} - ۸۲ لا - ۷۲

۵۹ لا^{۲} - ۸۲ لا - ۷۲) ۲۳۶ لا^{۳} - ۱۷۷ لا^{۲} - ۸۲۶ لا + ۴۷۲ (۴ لا

۲۳۶ لا^{۳} - ۳۲۸ لا^{۲} - ۲۸۸ لا

۱۵۱ لا^{۲} - ۵۳۸ لا + ۴۷۲

۵۹ سے ضرب دیکر

۵۹ لا^{۲} - ۸۲ لا - ۷۲) ۸۹۰۹ لا^{۲} - ۳۱۷۴۲ لا + ۲۷۸۴۸ (۱۵۱

۸۹۰۹ لا^{۲} - ۱۲۳۸۲ لا - ۱۰۸۷۲

− ۱۹۳۶۰ لا + ۳۸۷۲۰

اس کو - ۱۹۳۶۰ سے تقسیم کرنے سے

لا - ۲) ۵۹ لا^{۲} - ۸۲ لا - ۷۲ (۵۹ لا + ۳۶

۵۹ لا^{۲} - ۱۱۸ لا

۳۶ لا - ۷۲

۳۶ لا - ۷۲

×

اس لیے (لا − ۲) جملات ف (لا) اور فَ (لا) کا عاد اعظم ہے پس $(لا - ۲)^۲$ جملہ ف (لا) کا جزو ضربی ہے ۔

$$\therefore \quad ف(لا) = لا^۴ - لا^۳ - ۷لا^۲ + ۸لا + ۴ = (لا - ۲)^۲ \, فہ(لا)$$

فہ (لا) کی قیمت تقسیم سے نکالی جاسکتی ہے ۔

$$لا^۲ - ۴لا + ۴ \;)\; لا^۴ - لا^۳ - ۷لا^۲ + ۸لا + ۴ \;(\; لا^۲ + ۳لا + ۱$$

$$لا^۴ - ۴لا^۳ + ۴لا^۲$$

$$۳لا^۳ - ۱۱لا^۲ + ۸لا + ۴$$

$$۳لا^۳ - ۱۲لا^۲ + ۱۲لا$$

$$لا^۲ - ۴لا + ۴$$

$$لا^۲ - ۴لا + ۴$$

$$\times$$

$$\therefore \quad فہ(لا) = لا^۲ + ۳لا + ۱$$

$$\text{اور} \quad ف(لا) = (لا - ۲)^۲ (لا^۲ + ۳لا + ۱) = ۰$$

∴ مساوات کی اصلیں ہیں ۲، ۲، $\frac{-۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$

حل کرو ۔

(۲) $لا^۴ + ۲لا^۳ - ۸لا + ۵ = ۰$

(۳) $لا^۴ - ۹لا^۲ + ۴لا + ۱۲ = ۰$

(۴) $لا^۵ - ۲لا^۴ - ۲لا^۳ + ۴لا^۲ + لا - ۲ = ۰$

(۵) $۳لا^۷ - لا^۶ - لا^۵ - لا^۴ = ۰$

(۶) $لا^۵ - ۳لا^۴ - ۲لا^۳ + ۶لا^۲ + لا - ۳ = ۰$

(۷) $لا^۶ + ۷لا^۵ + ۳۳لا^۴ + ۸۶لا^۳ + ۱۵۵لا^۲ + ۱۵۹لا + ۹۹ = ۰$

(۸) $لا^۵ - ۳لا^۴ - ۵لا^۳ + ۱۳لا^۲ + ۲۴لا + ۱۰ = ۰$

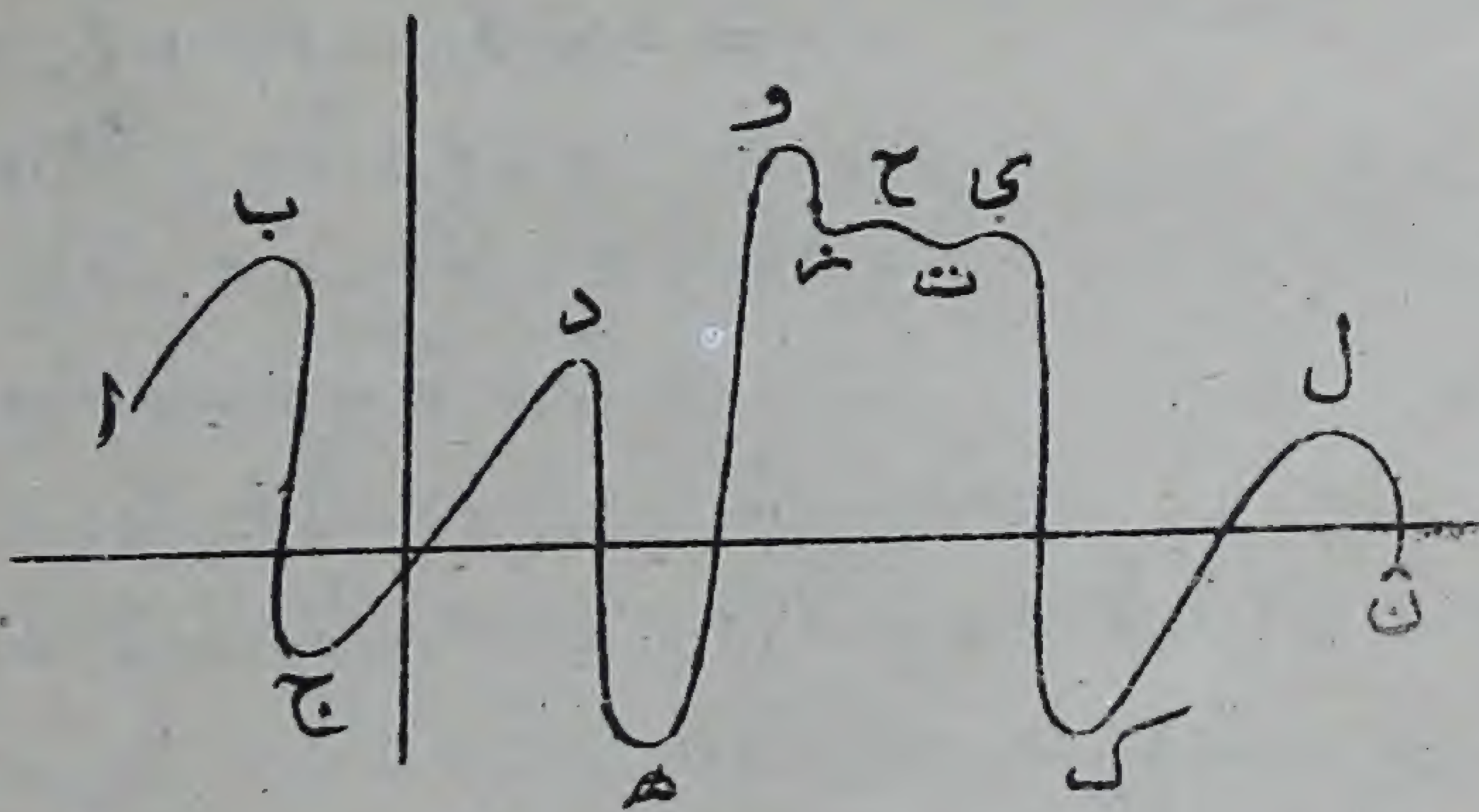
(۹) اس طریقہ سے مساوات درجۂ دوم کی مساوی اصلوں کے لیے شرط حاصل کرو ۔

(۱۰) اس طریقہ سے مساوات لہ لا^{۳} + ب لا^{۲} + ج لا + و = ۰ کی دو مساوی اصلوں کی شرط دریافت کرو۔

(۱۱) ثابت کرو کہ مساوات (ل) لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۲ لا - ۴۸ = ۰

اور (ب) لا^{۴} - ۳ لا^{۳} - ۶ لا^{۲} + ۱۴ لا + ۱۲ = ۰

کی کوئی مکرر اصلیں نہیں ہیں۔

۷۴ - اعظم اور اقل قیمتیں - دوسرے باب میں بتایا گیا ہے کہ مسلسل تفاعل اپنی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے درمیان تمام قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ ممکن ہے کہ تفاعل مسلسل بڑھتا چلا جائے یا مسلسل گھٹتا جائے یا کبھی بڑھے اور پھر گھٹے وغیرہ، وغیرہ۔ مسلسل بڑھنے یا گھٹنے والے تفاعلوں کو یکسا رنگی تفاعل کہتے ہیں۔ ایسے تفاعلوں میں بیش ترین قیمت اور کم ترین قیمت وقفے کے سروں پر ہوتی ہے۔ لیکن کہیں بڑھنے اور کہیں گھٹنے والے تفاعل کی صورت میں لازمی چند ایسے نقطے ہونگے جہاں بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا عین شروع ہوگا یا گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہوگا۔ شکل میں ایک منحنی کی ترسیم ہے۔ اس ترسیم سے ظاہر ہے کہ نقاط ب، د، و، ح، ی اور ل پر بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا شروع ہوتا ہے اور نقاط ج، ھ، ز، ت، ک پر گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہوتا ہے۔

ان نقاط کو منحنی کے ٹھیراؤ کے نقطے کہتے ہیں کیونکہ ان نقطوں پر معین بڑھنے یا گھٹنے سے رُک کر ٹھیر سا جاتا ہے ۔ اب ٹھیراؤ کے نقطوں میں مزید امتیاز کیا جاتا ہے۔ وہ ٹھیراؤ کے نقطے جہاں بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا شروع ہوتا ہے جیسے ب، د ...... اعظم نقطے کہلاتے ہیں اور گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہونے والے نقطے جیسے ج، ھ .... اقل نقطے واضح رہے کہ تفاعل کی اعظم قیمت لازماً بیش ترین قیمت نہیں ہے اور اسی طرح اقل قیمت کم ترین قیمت نہیں ہے ۔ تحلیلی زبان میں اس بات کو یوں بیان کرتے ہیں کہ اگر لا = ل پر

ف (ل) > ف (ل ± ھ) جہاں ھ کافی چھوٹی ثبت مقدار ہے

تو لا = ل کو تفاعل ف (لا) کا اعظم نقطہ اور ف (ل) کو تفاعل کی اعظم قیمت کہتے ہیں ۔

اسی طرح اگر لا = ب پر ف (ب) < ف (ب ± ھ) جہاں ھ کافی چھوٹی ثبت مقدار ہے تو لا = ب کو تفاعل ف (لا) کا اقل نقطہ اور ف (ب) کو تفاعل کی اقل قیمت کہتے ہیں ۔

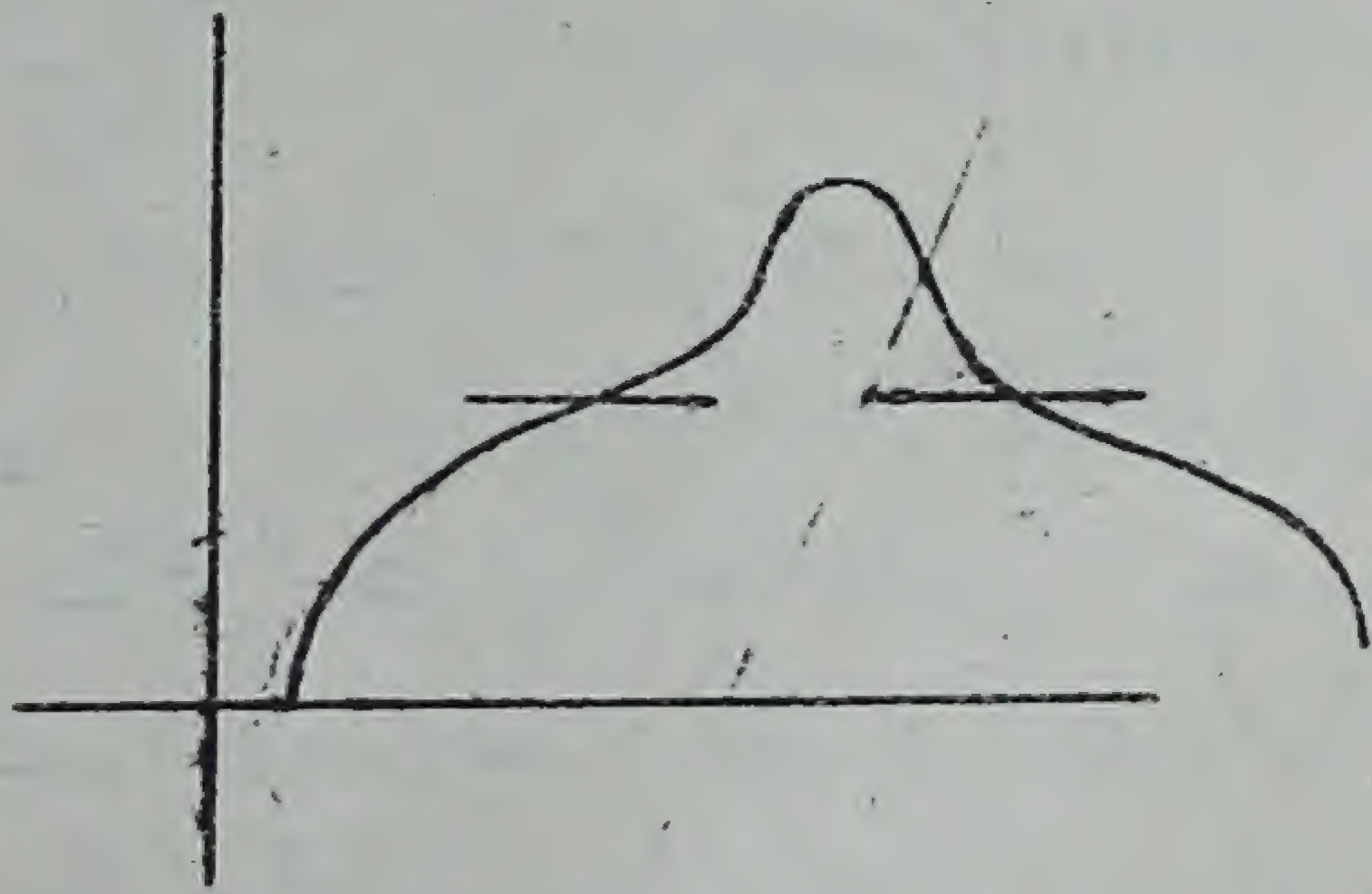
اس تعریف سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ پر تفاعل کا اعظم یا اقل ہونا قریب کے نقطوں پر تفاعل کی قیمت پر منحصر ہے اور بیش ترین یا کم ترین قیمت کا انحصار پورے وقفے میں تفاعل کی قیمت پر ہے ۔

اب ہمیں معلوم ہے کہ اگر ف (لا) متغیر لا کے ساتھ ساتھ بڑھ رہا ہو تو فَ (لا) یعنی $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ [ف (لا)] کی قیمت ثبت ہوگی اور اگر ف (لا) گھٹ رہا ہو جبکہ لا بڑھ رہا ہے تو فَ (لا) منفی ہوگا ۔ ف (لا) کی اعظم قیمت اُس نقطہ پر ہوتی ہے جہاں ف (لا) بڑھنا ختم کر کے عین گھٹنا شروع کرے یعنی فَ (لا) ثبت قیمت سے منفی قیمت میں عین تبدیل ہوتا ہے ۔ یعنی فَ (لا) صفر کے مساوی ہوتا ہے ۔ اسی طرح ف (لا) کی اقل قیمت اس نقطہ پر ہوگی جہاں فَ (لا) منفی قیمت سے ثبت قیمت میں عین تبدیل ہو ۔ پس ظاہر ہے کہ تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتیں ایسے نقطوں پر ہوتی ہیں جہاں فَ (لا) صفر ہے ۔

نیز فَ (لا) = ۰ والے نقطوں پر تفاعل کی ایک طرح قیمت ٹھہر سی جاتی ہے اور اسی لیے ان تمام نقطوں کو ٹھہراؤ کے <u>نقطے</u> کہتے ہیں۔ ٹھہراؤ کے <u>نقطے</u> دریافت کرنے کے لیے تفاعل ف (لا) کو تفرق کر کے فَ (لا) کو صفر رکھو اور اس سے لا کی قیمتیں نکالو جو درکار ہیں۔ لیکن یہ ضروری نہیں کہ تمام ٹھہراؤ کے <u>نقطے</u>، اعظم یا اقل <u>نقطے</u> ہوں۔ ایسا ممکن ہے کہ فَ (لا) کی قیمت مثبت سے کم ہوتے ہوتے صفر ہو جائے اور پھر بڑھنے لگے یعنے ہمیشہ مثبت رہے۔ اسی طرح یہ بھی ممکن ہے کہ فَ (لا) کی قیمت منفی سے بڑھتے بڑھتے صفر ہو جائے اور پھر گھٹنے لگے یعنے ہمیشہ منفی رہے۔ ظاہر ہے کہ یہ <u>نقطے</u> اعظم یا اقل <u>نقطے</u> نہیں ہیں۔ چونکہ ان نقطوں پر منحنی مڑ جاتا ہے جیسا کہ ترسیم سے ظاہر ہے اس لیے ان نقطوں کو انعطاف کے <u>نقطے</u> کہتے ہیں۔ پس ٹھہراؤ کے نقطوں میں مزید امتیاز کرنے کے لیے فَ (لا) کی علامت ٹھہراؤ کے <u>نقطے</u> سے ذرا پہلے اور ذرا بعد دریافت کرو۔ یاد رہے کہ فَ (لا) کی ٹھیک قیمت نکالنے کی ضرورت نہیں بلکہ صرف علامت درکار ہے۔ اب اگر دونوں جانب علامت ایک ہی ہے تو یہ انعطاف کا نقطہ ہے اور اگر علامت مثبت سے منفی ہوتی ہے تو اعظم نقطہ ہے اور اگر علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے تو اقل نقطہ ہے۔ واضح رہے کہ فَ (لا) = ۰ کے علاوہ اور بھی انعطاف کے <u>نقطے</u> ہو سکتے ہیں لیکن اعظم اور اقل نقطوں کے لیے یہ شرط ضروری ہے سوائے اس صورت کے جبکہ منحنی کا ڈھال غیر مسلسل ہے۔

مثال (۱)۔ منحنی ما = $\frac{\text{لا}^{۵}}{۵} - \frac{\text{لا}^{۴}}{۴} - ۴\,\text{لا}^{۳} - ۲\,\text{لا}^{۲} + ۱۶\,\text{لا} + ۵$ کے ٹھہراؤ کے

نقطے دریافت کرو اور ان میں تفریق کرو۔

فر ا / فر لا = لا^۴ - لا^۳ - ۱۲ لا^۲ - ۴ لا + ۱۶ = (لا - ۱)(لا - ۴)(لا + ۲)^۲

اب ٹھیراؤ کے نقطوں کے لیے فر ا / فر لا = ۰

یعنی (لا - ۱)(لا - ۴)(لا + ۲)^۲ = ۰

اور لا = ۱، ۴، -۲

نقطہ لا = ۱ پر اگر ھ کافی چھوٹی مثبت مقدار ہو تو

لا = ۱ - ھ کے لیے فر ا / فر لا کی علامت ہے (-)(-)(+) = (+)

اور لا = ۱ + ھ .... (+)(-)(+) = (-)

اس لیے لا = ۱ تفاعل کا اعظم نقطہ ہے اور اعظم قیمت ۱۴ $\frac{۱۹}{۲۰}$ ہے

اسی طرح لا = ۴ - ھ کے لیے فر ا / فر لا کی علامت ہے (+)(-)(+) = (-)

اور لا = ۴ + ھ .... (+)(+)(+) = (+)

اس لیے لا = ۴ تفاعل کا اقل نقطہ ہے، اور تفاعل کی اقل قیمت - $\frac{۲۶}{۵}$ ہے

اور لا = -۲ پر لا = -۲ - ھ کے لیے فر ا / فر لا کی علامت ہے (-)(-)(+) = (+)

اور لا = -۲ + ھ .... (-)(-)(+) = (+)

اس لیے لا = -۲ نقطۂ انعطاف ہے اور یہاں تفاعل کی قیمت - $\frac{۳}{۵}$ ہے۔

(۲) ذیل کے منحنیوں کے ٹھیراؤ کے نقطے دریافت کرو اور ان میں تمیز کرو:-

(ا) ا = لا^۳ - ۳ لا^۲ - ۹ لا - ۵

(ب) ا^۲ = لا (لا^۲ - ۴)

(ج) ا = ۲ لا^۳ - ۹ لا^۲ + ۱۲ لا - ۳

(د) ا = $\frac{۱}{۳}$ لا^۳ - $\frac{۱}{۲}$ لا^۲ - ۲ لا + ۲

(۳) ذیل کے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتیں محسوب کرو:-

(ل) $\text{لا}^{۴} - ۸\,\text{لا}^{۳} + ۲۲\,\text{لا}^{۲} - ۲۴\,\text{لا} + ۱۴$

(ب) $\text{لا}\,(۶ + \text{لا})^{۲}\,(۶ - \text{لا})^{۳}$

(ج) $\text{لا}\,(\text{ل} + \text{لا})^{۲}\,(\text{ل} - \text{لا})^{۳}$

(د) $(۲ + \text{لا})(۳ - ۲\,\text{لا})^{۲}(\text{لا} + ۴)$

۴ء۷۲ - دوسرے رتبہ کے مشتق کی ہندسی تعبیر:-

گذشتہ دفعہ میں اعظم اور اقل قیمتیں حاصل کی گئی ہیں اور ان میں امتیاز کرنے کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی علامت پر نقطہ سے ذرا پہلے اور ذرا بعد غور کرنا پڑتا ہے - لیکن اکثر سوالات میں یہ مشکل ہوگا - ہمیں معلوم ہے کہ جیسے پہلے مشتق $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی مثبت یا منفی علامت اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ لا کے بڑھنے کے ساتھ ما بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ اسی طرح $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے مشتق یعنی $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ کی مثبت یا منفی علامت اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ لا کے بڑھنے کے ساتھ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے - پس اگر $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ کی قیمت مثبت ہے تو اس کے معنی یہ ہیں کہ لا کے بڑھنے کے ساتھ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ یعنی منحنی کا ڈھال بڑھ رہا ہے اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ کی منفی علامت سے ظاہر ہے کہ لا کے بڑھنے کے ساتھ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ گھٹ رہا ہے - اب اعظم نقطہ پر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ مثبت سے منفی قیمت عین اختیار کرتا ہے یعنی گھٹتا ہے :- اس لیے اعظم نقطے پر $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ منفی ہوگا - اور اقل نقطے پر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ منفی سے مثبت ہوتا ہے - یعنے بڑھتا ہے اس لیے اقل نقطے پر $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ مثبت ہوگا - اور نقطۂ انعطاف پر منحنی کا ڈھال $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ بڑھنا ختم کر کے گھٹنا شروع کرتا ہے یا گھٹنا ختم کر کے بڑھنا

شروع کرتا ہے یعنی $\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فلا}^2}$ کی قیمت صفر ہے۔

پس اگر کسی نقطہ پر $\frac{\text{فا}}{\text{فلا}}$ = صفر اور $\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فلا}^2}$ مثبت ہے تو نقطہ اقل نقطہ ہے۔

اور اگر $\frac{\text{فا}}{\text{فلا}}$ = صفر اور $\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فلا}^2}$ منفی ہے تو اعظم نقطہ ہے۔

اور $\frac{\text{فا}}{\text{فلا}}$ = صفر اور $\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فلا}^2}$ = صفر تو بالعموم نقطۂ انعطاف ہے۔

مثال (۱) $\text{ا} = 3\,\text{لا}^4 - 8\,\text{لا}^3 - 30\,\text{لا}^2 + 72\,\text{لا} + 58$ کے اعظم اور اقل نقطے دریافت کرو۔

$$\frac{\text{فا}}{\text{فلا}} = 12\,\text{لا}^3 - 24\,\text{لا}^2 - 60\,\text{لا} + 72 = 12(\text{لا}^3 - 2\,\text{لا}^2 - 5\,\text{لا} + 6)$$
$$= 12(\text{لا} - 1)(\text{لا} + 2)(\text{لا} - 3)$$

$\therefore$ $\frac{\text{فا}}{\text{فلا}}$ = صفر جبکہ لا = ۱، −۲، اور ۳

اب $\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فلا}^2} = 36\,\text{لا}^2 - 48\,\text{لا} - 60$

لا = ۱ کے لیے $\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فلا}^2} = 36 - 48 - 60$ یعنی منفی مقدار ہے

اور اس لیے یہ اعظم نقطہ ہے۔

لا = −۲ کے لیے $\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فلا}^2} = 144 + 96 - 60$ یعنی مثبت مقدار ہے

اور یہ اقل نقطہ ہے۔

لا = ۳ کے لیے $\frac{\text{ف}^2\text{ا}}{\text{فلا}^2} = 324 - 144 - 60$ یعنی مثبت مقدار ہے

اور یہ اقل نقطہ ہے۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ مستقل محیط والے مستطیلوں میں سب سے بڑا رقبہ والا مستطیل مربع ہے۔

فرض کرو کہ مستطیل کے اضلاع لا اور ما ہیں اور اس کا محیط ل ہے۔

تو $\text{۲ لا} + \text{۲ ما} = \text{ل}$ اور رقبہ $\text{س} = \text{لا ما} = \text{لا} \frac{(\text{ل} - \text{۲ لا})}{\text{۲}}$

$$= \frac{\text{ل لا}}{\text{۲}} - \text{لا}^{\text{۲}}$$

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ل}}{\text{۲}} - \text{۲ لا} \qquad \therefore \text{لا} = \frac{\text{ل}}{\text{۴}}$$

اور $\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{س}}{\text{فر لا}^{\text{۲}}} = -\text{۲}$ اس لیے $\text{لا} = \frac{\text{ل}}{\text{۴}}$ اعظم قیمت ہے اور $\text{ما} = \frac{\text{ل}}{\text{۴}}$

پس مستطیل مربع ہوگا اور اس کا رقبہ اعظم ہوگا۔

ذیل کے تفاعلوں کے لیے اعظم اور اقل قیمتیں محسوب کرو:-

(۳) $\frac{\text{۶ لا}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}$

(۴) $\frac{\text{لا}^{\text{۲}} - \text{۷ لا} + \text{۶}}{\text{لا} - \text{۱۰}}$

(۵) $\frac{(\text{ل} - \text{لا})^{\text{۳}}}{\text{ل} - \text{۲ لا}}$

ذیل کے منحنیوں کے ٹھیراؤ کے نقطے معلوم کرو اور ان میں تمیز کرو:-

(۶) $\text{۴ ما} + \text{لا}^{\text{۳}} - \text{۳ لا}^{\text{۲}} + \text{۴} = \text{۰}$

(۷) $\text{لا}^{\text{۲}} + \frac{\text{ما}}{\text{لا}} = \text{۱۲}$

(۸) $\text{ما} = \text{لا} - \text{۲ جم لا}$

(۹) $\frac{\text{لا}}{\text{۲}} = \text{ما} - \text{جب لا}$

(۱۰) $\text{ما} = (\text{لا} + \text{۱})^{\frac{\text{۲}}{\text{۳}}} (\text{لا} - \text{۵})^{\text{۲}}$

(۱۱) ثابت کرو کہ مستقل رقبے والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے محیط والا

مستطیل مربع ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ دائرہ کا سب سے بڑا وتر اس کا قطر ہے۔

(۱۳) ایک رُبع دائرہ میں اعظم رقبہ والا مستطیل جو بن سکتا ہے اس کے ابعاد معلوم کرو۔

(۱۴) اگر ۲لا + ما = ک جہاں ک مستقل ہے تو (لا × ما) کی اعظم قیمت معلوم کرو۔

(۱۵) خط ما = لا پر وہ نقطہ معلوم کرو جس کے فاصلوں کا مربع نقاط (۔ا، ۰) اور (ا، ۰) سے اقل ہو۔

(۱۶) قطر ل والے دائرہ میں مستطیل بنایا گیا ہے جس کے اضلاع لا اور ما ہیں بتاؤ کہ لا ما^۲ کیا اعظم ہوگا۔

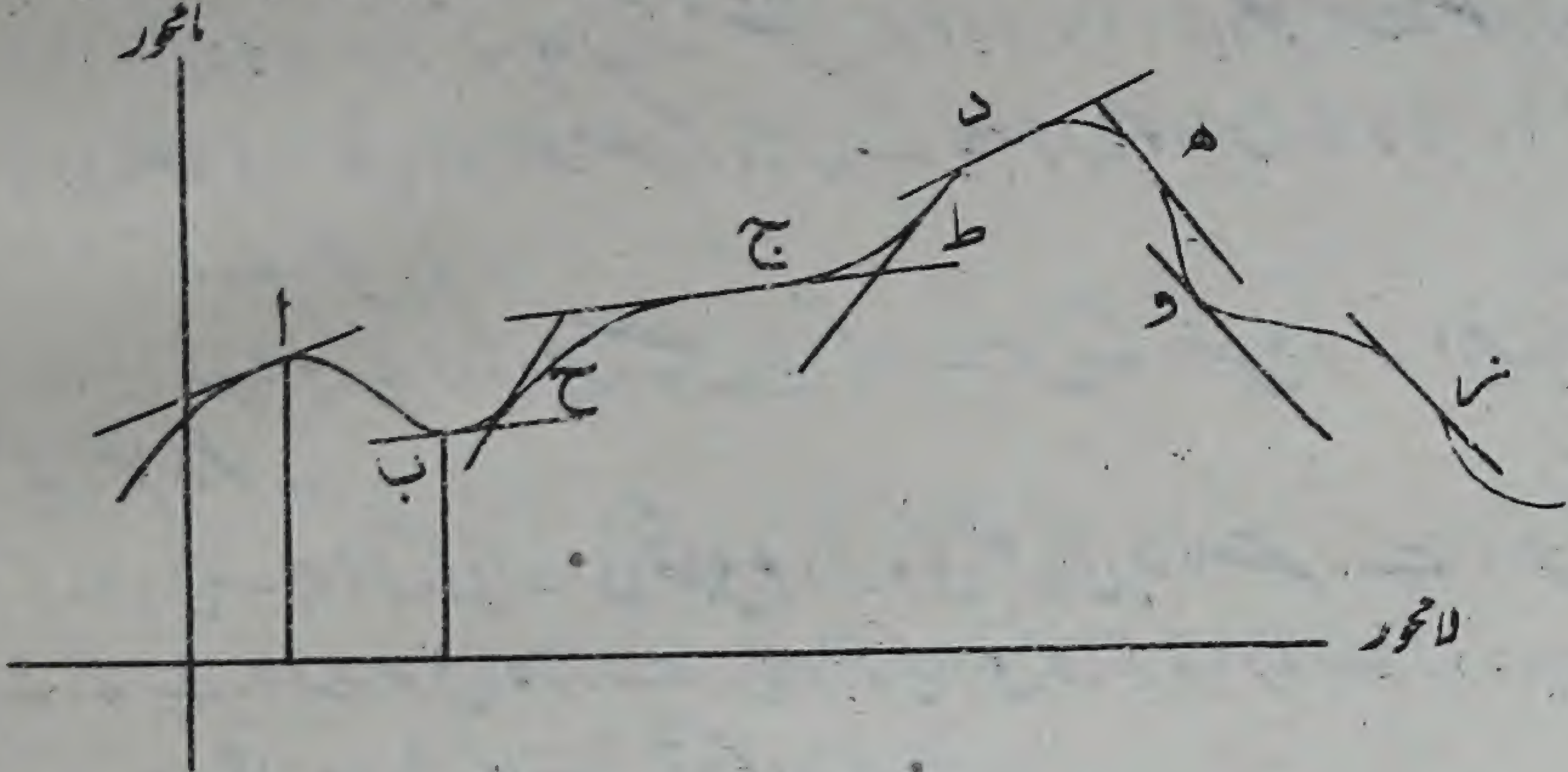
(۱۷) ایک پھولوں کی کیاری قطاع دائرہ کی شکل کی بنانا مقصود ہے۔ اس کو مکمل گھیرنے کے لیے ۲۰ فٹ طول کا تار ہے۔ بتاؤ کہ کیاری کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہونے کی صورت میں قطاع دائرہ کا نصف قطر کیا ہے۔

(۱۸) ایک کھلے تالاب کا قاعدہ مربع ہے اور رُخ انتصابی ہیں۔ اور اس کی گنجایش ۴۰۰۰ مکعب فٹ ہے۔ اندر کی جملہ سطح پر سفیدہ کرنیکے اخراجات کم سے کم ہونے کی صورت میں تالاب کے ابعاد معلوم کرو۔

(۱۹) ایک تار کے ٹکڑے کو دو حصوں میں کاٹ کر ایک حصہ کو دائرہ میں اور دوسرے حصہ کو مربع میں موڑ دیا گیا ہے۔ اگر دونوں شکلوں کے مربع کا مجموعہ اقل ہو تو تار کی تقسیم کی نسبت دریافت کرو۔

(۲۰) بتاؤ کہ ۲۰۰ مربع فٹ کپڑے سے زیادہ سے زیادہ حجم والے مخروطی نما خیمہ کے ابعاد کیا ہونگے۔

۷۵،۴ ۔ محدّب اور مقعّر منحنی:۔ اگر منحنی کے کسی نقطہ پر مماس کھینچا جائے تو نقطہ کے قرب میں منحنی، مماس کے کلیۃً اوپر کی جانب یا نیچے کی جانب یا ایک طرف کا حصہ نیچے کی جانب اور دوسری طرف کا حصہ اوپر کی جانب واقع ہوگا۔ شکل میں ایک منحنی مرتسم کیا گیا ہے۔ اس کے نقاط ا، د اور س پر منحنی، مماس کے کلیۃً نیچے واقع ہے اور نقاط ب اور و پر کلیۃً اوپر واقع ہے نقاط ح، ج، ط، ھ پر منحنی کا ایک جانب کا حصہ ایک طرف اور دوسری جانب کا حصہ دوسری طرف واقع ہے یعنی منحنی، مماس کو ان نقطوں پر عبور کرتا ہے۔ اگر کسی نقطہ کے دونوں جانب منحنی، مماس کے کلیۃً اوپر واقع ہو تو ایسے نقطہ پر منحنی کو اوپر کی

طرف مقعر کہتے ہیں اور اگر کلیتہً نیچے واقع ہو تو منحنی کو اس نقطۂ پر اوپر کی طرف محدّب کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اوپر کی طرف مقعر اور نیچے کی طرف محدّب ایک ہی بات ہے اور اسی طرح اوپر کی طرف محدّب اور نیچے کی طرف مقعر ایک ہی چیز ہے۔ نیز اگر منحنی،

مماس کو عبور کرے تو ایسے نقطہ کو نقطۂ انعطاف کہتے ہیں۔ ہر نقطۂ انعطاف منحنی کے محدّب اور مقعر حصوں کو جدا کرتا ہے۔

اب اوپر کی طرف محدّب نقطے کے قرب میں منحنی کلیتہً مماس کے نیچے واقع ہے یعنی مماس کا ڈھال مسلسل کم ہوتا جاتا ہے اور مقعر نقطہ کے قرب میں مماس کا ڈھال بڑھتا جاتا ہے۔ اور نقطۂ انعطاف پر مماس کا ڈھال بڑھنا یا گھٹنا ختم کر کے گھٹنا یا بڑھنا عین شروع کرتا ہے۔ اس لیے محدّب نقطہ پر $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ منفی ہے۔ مقعر نقطے پر $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ مثبت ہے اور نقطۂ انعطاف پر $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ صفر ہے۔

اگر محدّب نقطے پر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ صفر ہے تو یہ اعظم نقطہ ہوگا اور مقعر نقطہ پر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$ تو اقل نقطہ ہوگا۔ اس سے ظاہر ہے کہ اعظم اور اقل نقطے منحنی کے محدّب اور مقعر نقطوں میں سے چند نقطے ہیں۔

مثال (۱) منحنی $\text{ما} = ۴\,\text{لا}^{۴} - ۵\,\text{لا}^{۳} + ۳\,\text{لا} - ۲$ کے نقاطِ انعطاف دریافت کرو اور بتاؤ کہ کون سے حصے محدّب اور مقعر ہیں۔

$$\text{اب}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۱۶\,\text{لا}^{۳} - ۱۵\,\text{لا}^{۲} + ۳$$

اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۴۸\,\text{لا}^{۲} - ۳۰\,\text{لا} = ۴۸\,\text{لا}\left(\text{لا} - \frac{۵}{۸}\right)$

نقاطِ انعطاف پر $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ = صفر اس لیے لا = صفر اور $\frac{۵}{۸}$ نقاطِ انعطاف ہیں۔

اگر لا < صفر تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ ثبت ہے یعنی منحنی مقعّر ہے۔

اور لا > صفر سے لیکن < $\frac{۵}{۸}$ سے تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ منفی ہے یعنی منحنی محدّب ہے۔

لا > $\frac{۵}{۸}$ سے تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ ثبت ہے یعنی منحنی مقعّر ہے۔

(۲) منحنی $\text{ما}^{۵} = (\text{لا} - ۳)^{۳}$ کے نقاطِ انعطاف دریافت کرو۔

منحنی کی مساوات ہے $\text{ما} = (\text{لا} - ۳)^{\frac{۳}{۵}}$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۳}{۵}(\text{لا} - ۳)^{-\frac{۲}{۵}} = \frac{۳}{۵(\text{لا} - ۳)^{\frac{۲}{۵}}}$$

اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = -\frac{۶}{۲۵}(\text{لا} - ۳)^{-\frac{۷}{۵}} = -\frac{۶}{۲۵(\text{لا} - ۳)^{\frac{۷}{۵}}}$

اس سوال میں $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ متغیر لا کی کسی محدود قیمت کے لیے صفر نہیں ہے البتہ لا = ۳ کے لیے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ دونوں لاتناہی ہیں۔ اور اگر لا < ۳ تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ منفی ہے اور لا > ۳ تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ ثبت ہے یعنی $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ کی علامت نقطہ لا = ۳ پر بدلتی ہے اور یہ نقطۂ انعطاف ہے اور لا < ۳ کے لیے منحنی محدّب ہے اور لا > ۳ کے لیے مقعّر ہے۔

(۳) $\text{ما} = \text{لا}^{۲}$، $\text{ما} = \text{لا}^{۳}$، $\text{ما} = \text{لا}^{۴}$ ...... $\text{ما} = \text{لا}^{\text{ن}}$ کے لیے نقاطِ انعطاف معلوم کرو اور محدّب اور مقعّر حصّوں میں تقسیم کرو۔

ذیل کے منحنیوں کے نقاطِ انعطاف معلوم کرو اور انہیں محدّب اور مقعّر حصّوں

میں تقسیم کرو :-

(۴) ا = جب لا، جم لا، مس لا، قط لا، قم لا

(۵) ا = و$^{\text{لا}}$، لوک لا

(۶) ا = لا^{۴} − ۳ لا^{۳} − ۶ لا^{۲} + ۷ لا − ۳

(۷) ا = ۳ لا^{۴} − ۴ لا^{۳} + ۷ لا − ۱

(۸) ا = لا^{۳} − ۵ لا^{۲} + ۸ لا + ۲

(۹) ا − ب = (لا − ل)^{۳}

(۱۰) ا = ۴ لا^{۲} − ۷ لا + ۲

(۱۱) ا = ۲ − ۳ لا − ۴ لا^{۳}

(۱۲) ل لا^{۲} + ۲ ھ لا ا + ب ا^{۲} + ۲ گ لا + ۲ ب ا + ج = ۰

۴۰۹ - عملی ریاضی میں تفرقی سر کے اطلاقات :-

ابتداء میں بتایا گیا ہے کہ تفرقی سر شرح تبدیلی کا ناپ ہے۔ علم ہندسہ میں اس کے اطلاقات کی چند مثالیں اب تک دی گئی ہیں۔ لیکن تمام علوم سائنس میں ہر موقع پر شرح تبدیلی کے ناپ کی ضرورت پڑتی ہے۔ وقت کے گزرنے کے ساتھ جسم اپنی وضع یا مقدار یا مقام بدلتا ہے اور اس لیے بالعموم جسم کی وضع یا مقدار یا مقام کے بیان کرنے والے تفاعل میں وقت بھی شریک ہوتا ہے اور بلحاظ وقت تفرقی سر سے شرح تبدیلی کو ناپتے ہیں۔ بالخصوص علم حرکت میں تفرقی سر کا خاص اطلاق ہے۔

۴۰۹۱ - رفتار اور اسراع :- اگر ایک ذرّہ خطِ مستقیم میں

حرکت کر رہا ہو اور کسی نقطۂ م کو مبداء مان لیا جائے اور وقت ت ثانیوں کے بعد

م (مبداء) ——— لا ——— ا

اس کا مقام ا ہو جہاں م ا = لا تو اس آن میں رفتار دریافت کرنے کے لیے

فرض کرو کہ مزید فاصلہ مف لا طے کرنے میں وقت مف ت صرف ہوتا ہے۔ اس لیے

رفتار $\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ت}}$ کی انتہا ہوگی۔

یعنی رفتار ء = $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$

اگر ذرہ مستوی میں حرکت کر رہا ہے اور وقت ت پر ذرہ کے محدد (لا، ما) ہیں تو اس کی رفتار (ء، و) محوروں کی سمتوں میں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ ہوگی۔ اکثر سوالات میں رفتار بھی بدلتی ہے یعنی $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ بھی ت کا تفاعل ہوتا ہے۔ رفتار کے بدلنے کی شرح کو اسراع کہتے ہیں اس لیے ایک خط میں اسراع ہوگا $\frac{\text{فرء}}{\text{فرت}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرت}}\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right) = \frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}$

$= \frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ء}\,\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}$

اور مستوی میں اسراع ہوگا

$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2}$ اور $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرت}^2}$ یا ء $\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}$ اور و $\frac{\text{فرو}}{\text{فرما}}$ جہاں

ء = $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$ اور و = $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$

اب اگر کسی سوال میں ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہو اور اس کا اسراع وقت یا فاصلہ کا تفاعل ہو تو مساوات حرکت ہوگی:-

$$\frac{\text{فر}^2\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ف (ت)}$$

یا ء $\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}$ = فہ (لا) ہر دو صورت میں تکمل سے رفتار اور فاصلہ

وقت کی رقوم میں دریافت ہو سکتا ہے ۔

مثال (۱) ایک ذرّہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے اور اس کا اسراع ع مستقل ہے ۔ فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو ۔

فرض کرو کہ وقت ت پر مبدا ء سے فاصلہ لا ہے اور وقت صفر پر ذرّہ نے مبدا د سے رفتار ب کے ساتھ حرکت شروع کی ۔

$$\text{اب } \frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فرت}^2} = \text{ع}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ع ت} + \text{مستقل م}_1$$

ابتدائی شرط سے ظاہر ہے کہ رفتار ب = ۰ + م۱

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = \text{ب} + \text{ع ت}$$

پھر تکمل کرنے سے $\text{لا} = \text{ب ت} + \frac{1}{2}\,\text{ع ت}^2 + \text{مستقل م}_2$

اب چونکہ لا = ۰ جبکہ ت = ۰ اس لیے مستقل م۲ صفر ہے ۔

$$\therefore \text{لا} = \text{ب ت} + \frac{1}{2}\,\text{ع ت}^2$$

بعض سوالات میں جیسے حرکت زیرِ جاذبہ میں اسراع مستقل ہے اور نیچے کی طرف تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے مساوی ہے اس کو اکثر ج سے تعبیر کیا جاتا ہے ۔ اگر فاصلہ کے محور کو اوپر کی جانب مثبت لیا جائے تو ع = ـج ہوگا اور مساوات میں مناسب ترمیم کرنی پڑیگی ۔

مثال (۲) ایک ذرّہ خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہے اور اس کا اسراع خط کے ایک ثابت نقطہ کی طرف ہے اور فاصلہ کے تناسب ہے ۔ حرکت دریافت کرو ۔ فرض کرو کہ ثابت نقطہ کو مبدا د لیا جاتا ہے اور وقت ت پر ذرّہ کا فاصلہ لا اور رفتار د ہے

$$\text{تو } \text{د}\,\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} \propto -\text{لا}$$

= ـ ک^2 لا جہاں ک^2 ثمبت مستقل ہے ۔

∴ ی^2 = ـ ک^2 لا^2 + م$_1$ جہاں م$_1$ مستقل ہے ۔

اب اگر ابتدائے حرکت پر ذرّہ کو فاصلہ ا سے صفر رفتار سے چھوڑ دیا جاتا ہے تو

ی = ۰ جبکہ لا = ا اور ت = ۰

∴ ی^2 = ک^2 (ا^2 ـ لا^2)

∴ ی = ± ک $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$

مبداء ا

اگر ذرّہ کو صفر رفتار سے چھوڑ دیا جاتا ہے تو ظاہر ہے کہ کشش کے زیر عمل یہ مبداء کی طرف حرکت کریگا یعنی ی = $\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}}$ = ـ ک $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$

∴ ـ ∫ $\frac{\text{ف لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$ = ∫ ک ف ت

∴ جم$^{-1}$ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = ک ت + مستقل م$_2$

∴ $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = جم (ک ت + م$_2$)

اب لا = ا جبکہ ت = ۰

∴ ۱ = جم (م$_2$) ∴ م$_2$ = صفر

اور لا = ا جم ک ت

مثال (۳) ایک ذرّہ کو ابتدائی رفتار ی سے اُفق سے زاویہ عہ پر پھینک دیا گیا ہے ۔ اگر حرکت جاذبہ کے زیر عمل ہو اور ہوا کی مزاحمت کو نظرانداز کر دیا جائے تو طریق دریافت کرو ۔

ذرّہ ایک انتصابی مستوی میں حرکت کریگا ۔ نقطہ رمی کو مبداء مان لو

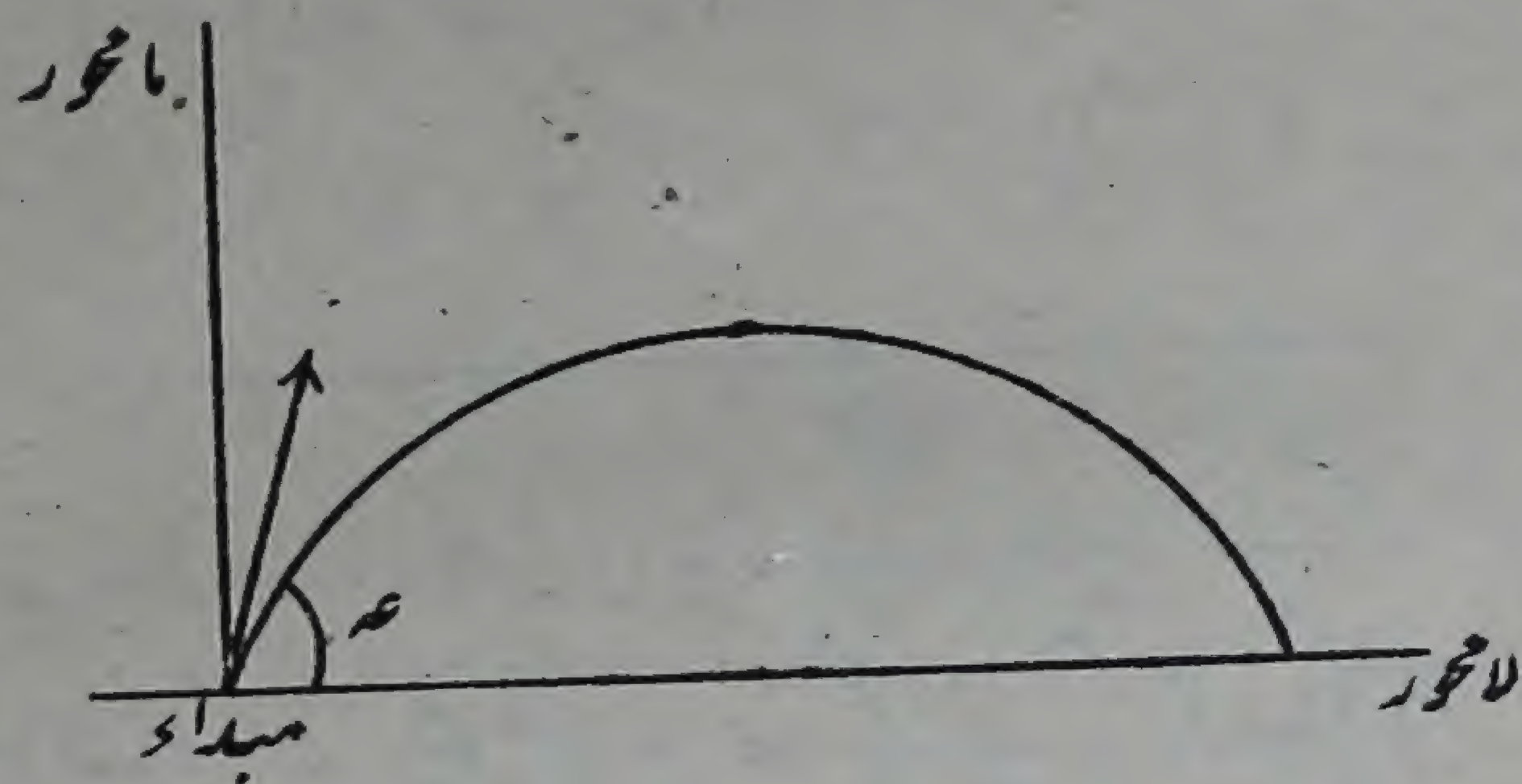
اور حرکت کی سمت میں اُفقی خط کو لا محور اور انتصابی خط کو ما محور لو۔ اور فرض کرو کہ صفر وقت پر ذرہ نے مبداء سے حرکت شروع کی تو لا اور ما محور کی سمت میں وقت ت کے بعد

$$\frac{\text{ف}^2\,\text{لا}}{\text{ف ت}^2} = \text{صفر}$$

ما محور

عہ

لا محور

مبداء

اور $\frac{\text{ف}^2\,\text{ما}}{\text{ف ت}^2} = -\text{ج}$ جہاں ج جاذبہ کا اسراع ہے۔

تکمل کرنے سے $\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}} = \text{مستقل}$

اور $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}} = -\text{ج ت} + \text{مستقل}$

اب ت = ۰ تو $\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}} = \text{ء جم عہ}$

اور $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}} = \text{ء جب عہ}$

$$\therefore \frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}} = \text{ء جم عہ}$$

اور $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}} = -\text{ج ت} + \text{ء جب عہ}$

دوبارہ تکمل کرنے سے $\text{لا} = \text{ت ء جم عہ} + \text{مستقل}$

$$\text{ما} = -\frac{1}{2}\text{ج ت}^2 + \text{ء جب عہ} \times \text{ت} + \text{مستقل}$$

چونکہ لا = ما = ۰ جبکہ ت = ۰ اس لیے لا اور ما کے مستقل صفر ہیں۔

پس لا = د جم عہ × ت

ما = د جب عہ × ت − $\frac{1}{2}$ ج ت^2

یہ طریق کی تبدیل مساوات ہے۔ اس میں سے ت ساقط کرنے سے طریق کی کارٹیزی مساوات ما = لا مس عہ − $\frac{1}{2}$ ج $\frac{لا^2}{د^2 جم^2 عہ}$ حاصل ہوتی ہے۔

یہ طریق ایک مکافی ہے۔

(۴) ایک ریل کو مستقل ابطاء لگا کر روکا جاتا ہے۔ اگر ابطاء لگانے کے بعد پہلے ثانیہ میں ۸۷ فٹ کا فاصلہ اور دوسرے ثانیہ میں ۸۵ فٹ کا فاصلہ طے کرے تو ریل کی ابتدائی رفتار، رکنے تک وقت اور طے شدہ فاصلہ معلوم کرو۔

(۵) دو مقاموں کے درمیان فاصلہ ل فٹ ہے۔ ریل ایک مقام سے مستقل اسراع ع سے حرکت شروع کرتی ہے۔ کچھ دیر بعد اسراع روک کر ابطاء عَ لگا دیا جاتا ہے اور دوسرے مقام پر ریل عین رک جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک مقام سے دوسرے مقام تک جانے میں $\sqrt{۲ ل \frac{ع + عَ}{ع عَ}}$ ثانیہ لگتا ہے۔

(۶) ذیل میں خطی حرکت میں فاصلہ اور وقت میں رشتہ دیا گیا ہے۔ رفتار اور اسراع مطلوبہ آن پر دریافت کرو۔

(ل) س = ۴۸ ت − ۱۶ ت^2 جبکہ ت = $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۳}{۲}$ ثانیہ

(ب) لا = ل جم $\frac{\pi ت}{۳}$ جبکہ ت = $\frac{1}{2}$، ۱، $\frac{۳}{۲}$ ثانیہ

(ج) لا = ب قو$^{-۲ت}$ جبکہ ت = ۱ ثانیہ

(د) ما = ۲ ت − ت^2 جبکہ ت = صفر، ۱ ثانیہ

(۷) اگر ایک ذرّہ خط مستقیم میں حرکت کر رہا ہو اور فاصلہ اور وقت میں رشتہ ج = $\sqrt{ت}$ ہو تو ثابت کرو کہ اسراع رفتار کے مکعب کی طرح

بدلتا ہے :

(۸) اگر فاصلہ اور وقت میں رشتہ $س = ا ق^{ت} + ب ق^{-ت}$ ہو تو ثابت کرو کہ اسراع طے شدہ فاصلہ کے مساوی ہے۔

(۹) اگر مستوی میں حرکت کی صورت میں وقت اور فاصلوں میں رشتے

لا = ا جم ت + ب اور ما = ا جب ت + د

تو ثابت کرو کہ رفتار مستقل ہے۔

(۱۰) اگر ایک ذرہ خطِ مستقیم میں ایسے اسراع کے زیرِ عمل حرکت کرے کہ اسراع فاصلہ کے تناسب ہو۔ اور ابتدائی رفتار صفر ہو تو فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو۔

(۱۱) ایک ذرہ کی خطِ مستقیم میں حرکت سکون سے ایسے اسراع کے زیرِ عمل ہے جو ایک ثابت نقطہ کی طرف ہے اور فاصلہ کے چار گنا کے مساوی ہے اور ابتداءً میں ذرہ ثابت نقطہ سے ۳ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو۔ نیز بتاؤ کہ ۵ ثانیہ کے بعد رفتار اور فاصلہ کیا ہوگا۔

(۱۲) ایک ذرہ کو انتصابی مستوی میں ۶۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے افق سے (۱) ۳۰° اور (۲) ۴۵° اور (۳) ۶۰° پر پھینکا جاتا ہے۔ بتاؤ کہ نقطۂ رمی میں اُفقی مستوی پر وہ کس فاصلہ پر گرے گا اور کتنی دیر بعد گرے گا۔ نیز ذرہ کی زیادہ سے زیادہ بلندی دریافت کرو۔

۴٫۹۲ ـ شرح تبدیلی کے دیگر اطلاقات

:- جیسا اوپر بیان کیا گیا ہے تفرقی سر شرح تبدیلی کو اپنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ذیل میں مختلف قسم کی مثالوں سے اس کے چند اطلاقات کو واضح کیا جائیگا۔

مثال (۱) ایک گیس کے پھیلنے کا جو ناگذار قانون $د ح^{۱٫۴} =$ مستقل ہے جہاں د دباؤ اور ح حجم ہے۔ کسی آن میں حجم ۱۰ مکعب فٹ ہے اور دباؤ ۵ پونڈ فی مربع انچ ہے۔ اگر حجم اس وقت بشرح ایک مکعب فٹ فی ثانیہ گھٹ رہا ہو تو دباؤ کے بدلنے کی شرح معلوم کرو۔

اب $د ح^{۱٫۴} =$ مستقل اور $\frac{فرح}{فرت} = -۱$ جہاں ت وقت کو تعبیر کرتا ہے
اس کو بلحاظ وقت ت کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$د \times ۱٫۴ \times ح^{۰٫۴} \times \frac{فرح}{فرت} + \frac{فرد}{فرت} \times ح^{۱٫۴} = صفر$$

$$\therefore \frac{فرد}{فرت} = -\frac{۱٫۴ \times د \times ح^{۰٫۴}}{ح^{۱٫۴}} \times \frac{فرح}{فرت} = -\frac{۱٫۴\, د}{ح} \cdot \frac{فرح}{فرت}$$

$$= -\frac{۵۰ \times ۱٫۴}{۱۰} \times (-۱)$$

$= ۷٫۰$ پونڈ فی مربع انچ۔

یعنی دباؤ ۷ پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔

مثال (۲) ایک مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر ۱" فی منٹ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ اور ارتفاع ۳" فی منٹ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔ اگر کسی آن میں نصف قطر ۱۸" ہو اور ارتفاع ۲۴" ہو تو بتاؤ اس وقت حجم اور مخروط کی مائل سطح کس شرح سے بدل رہے ہیں۔

فرض کرو کہ وقت ت پر مخروط کا ارتفاع ھ اور قاعدہ کا نصف قطر ر ہے۔

$$\therefore \text{حجم } ح = \frac{۱}{۳} \times ھ \times \pi ر^{۲}$$

$$\text{اور سطح } س = \frac{۱}{۲} \times ۲\pi ر \times \sqrt{ھ^{۲} + ر^{۲}} = \pi ر \times \sqrt{ھ^{۲} + ر^{۲}}$$

$$\text{اب } \frac{فرح}{فرت} = \frac{\pi}{۳}\left(\frac{فرھ}{فرت} ر^{۲} + ۲ ھ ر \frac{فرر}{فرت}\right) = \frac{\pi}{۳}\left[۱۸ \times ۱۸ \times ۳ + ۲ \times ۲۴ \times ۱۸ (-۱)\right]$$

$$= \pi \times ۱۸ \times ۲(۲۷ - ۲۴) = ۱۰۸\,\pi$$

$$\text{اور } \frac{فرس}{فرت} = \pi \frac{ر ھ}{\sqrt{ھ^{۲} + ر^{۲}}} \frac{فرھ}{فرت} + \pi\left[\sqrt{ھ^{۲} + ر^{۲}} + \frac{ر^{۲}}{\sqrt{ھ^{۲} + ر^{۲}}}\right] \frac{فرر}{فرت}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{ھ^{۲} + ر^{۲}}}\left[ھ ر \frac{فرھ}{فرت} + (ھ^{۲} + ۲ ر^{۲}) \frac{فرر}{فرت}\right] = \frac{\pi}{۳۰}\left\{۱۸ \times ۲۴ (۳) + (۲۴^{۲} + ۲ \times ۱۸^{۲})(-۱)\right\}$$

= π/۳۰ (۱۲۹۶ - ۱۲۲۴) = ۱۲/۵ π

یعنی حجم ۱۰۸ π مکعب انچ فی فٹ بڑھ رہا ہے اور سطح ۱۲/۵ π مربع انچ فی منٹ بڑھ رہی ہے ۔

(۳) ایک کرہ کا حجم ۱۶ مکعب انچ فی ثانیہ بڑھ رہا ہے ۔ بتاؤ کہ نصف قطر اور کرہ کی سطح کس شرح سے بڑھ رہی ہے جبکہ کرہ کا نصف قطر ۶" ہے ۔

(۴) ایک ۶ فٹ قد والا آدمی روشنی کے مبداء سے جو فرش سے ۱۵ فٹ کی اونچائی پر لٹک رہا ہے ۳ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دور ہٹ رہا ہے ۔ بتاؤ کہ سایہ کا آخری سرا کس شرح سے حرکت کر رہا ہے ۔ نیز بتاؤ کہ سایہ کا طول کس شرح سے بڑھ رہا ہے ۔

(۵) ایک ۲۴ فٹ لمبی سیڑھی دیوار کے ساتھ رکھی ہوئی ہے ۔ اس کا نچلا سرا دیوار سے ۸ فٹ کے فاصلہ پر ہے ۔ اگر سیڑھی کا نچلا سرا ۳ فٹ فی ثانیہ کے حساب سے دیوار سے دور ہٹ رہا ہے تو اوپر کے سرے کی حرکت کی شرح دریافت کرو ۔

(۶) ایک منحنی کی مساوات ما^2 = ۲ لا ہے ۔ اگر لا کی قیمت ۱/۴ اکائیاں فی ثانیہ گھٹ رہی ہو تو بتاؤ نقطہ (۸ ، ۴) پر ڈھال کس شرح سے گھٹ رہا ہے ۔

(۷) اگر ما = لا + ۱/لا تو ما کے بدلنے کی اوسط شرح بلحاظ لا کے معلوم کرو جبکہ لا کی قیمت ۲ سے ۴ تک بدلتی ہے ۔ نیز اس آن پر شرح معلوم کرو جبکہ لا = ۲

(۸) ایک ذرہ مکافی ۴ ما = لا^2 پر اس طرح حرکت کر رہا ہے کہ اس کا فصلہ فی ثانیہ ۲ اکائیوں کی مستقل شرح سے بڑھ رہا ہے تو بتاؤ کہ نقطہ زیر بحث اور نقطہ (۰ ، ۴) کے درمیان فاصلہ کس شرح سے بدل رہا ہے جبکہ لا = ۲ اور لا = √۸

(۹) ایک حوض کی شکل ایک ایسے مستدیر مخروط کی مانند ہے جس کا راس نیچے ہے اور قطر ارتفاع کے مساوی ہے ۔ بتاؤ اس کے اندر پانی کس شرح سے

ڈالا جا رہا ہے جبکہ گہرائی ۵ً ہے اور گہرائی بحساب ۴ً فی منٹ کے بڑھ رہی ہے۔

(۱۰) ایک آدمی ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک برج کی طرف (جو ۶۰ً اونچا ہے) چل رہا ہے۔ اگر وہ برج کی تہ سے ۸۰ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو بتاؤ کہ وہ برج کی چوٹی کے نزدیک کس شرح سے آرہا ہے۔

(۱۱) ایک مخروط کے قاعدہ کا قطر ۲ً فی منٹ کی شرح سے بڑھ رہا ہے اور ارتفاع ۳ً فی منٹ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ اگر نصف قطر ۱۶ً اور ارتفاع ۲۰ً ہو تو حجم اور منحنی سطح کے بدلنے کی شرح معلوم کرو۔

(۱۲) ایک مخروطی قیف کا نصف قطر ۳ً ہے اور اس کا ارتفاع بھی ۳ً ہے۔ اگر ایک مایع اس میں سے بشرح ایک مکعب انچ فی منٹ بہہ رہا ہے تو بتاؤ جبکہ مایع کی سطح چوٹی سے ۱ً کی گہرائی پر ہو تو سطح کس شرح سے گر رہی ہے۔

باب پنجم

تکمل

۵٫۱ - غیر معیّن تکملہ کی تعریف -

باب سوم کی دفعہ ۵٫۳ میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر کوئی تفاعل ف(لا) دیا ہوا ہو اور ہم ایک دوسرا تفاعل فہ (لا) ایسا معلوم کر سکیں کہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{ف لا}}\ \text{فہ (لا)} = \text{ف (لا)} \quad \text{.......... (۱)}$$

تو تفاعل فہ (لا) کو دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کا "تکملہ" اور اس عمل کو جس کے ذریعہ تفاعل فہ (لا) معلوم کیا جاتا ہے عمل "**تکمل**" کہتے ہیں اور اس کو ظاہر کرنے کے لیے حسبِ ذیل ترقیم اختیار کی جاتی ہے :-

$$\text{فہ (لا)} = \int \text{ف (لا) ف لا} \quad \text{.......... (۲)}$$

نیز تفاعل ف (لا) کو "**متکمل**" کہا جاتا ہے -

مثال کے طور پر ہم نے دیکھا تھا کہ اگر ف (لا) = ۵ $\text{لا}^{۴}$ + ۳ $\text{لا}^{۲}$ + ۴ ہو تو وہ تفاعل جس کا تفرقی سر ۵ $\text{لا}^{۴}$ + ۳ $\text{لا}^{۲}$ + ۴ ہو $\text{لا}^{۵}$ + $\text{لا}^{۳}$ + ۴ لا ہے اور اس لیے $\text{لا}^{۵}$ + $\text{لا}^{۳}$ + ۴ لا تفاعل ۵ $\text{لا}^{۴}$ + ۳ $\text{لا}^{۲}$ + ۴ کا تکملہ ہے -

تکمل

لیکن اگر ہم ایک تفاعل ۲ لا^۲ + ۳ لا لیں اور اس کو تفرق کریں تو

فر / فر لا (۲ لا^۲ + ۳ لا) = ۴ لا + ۳

اس کے بعد اگر ہم ۴ لا + ۳ کو پھر تکمل کریں تو

∫ (۴ لا + ۳) فر لا = ۴ . لا^۲/۲ + ۳ لا = ۲ لا^۲ + ۳ لا

یعنے وہی ابتدائی تفاعل ۲ لا^۲ + ۳ لا حاصل ہوتا ہے - اس سے ظاہر ہے کہ تکمل اور تفرق کے عمل بالکل اسی طرح ایک دوسرے کے مقلوب عمل ہیں جیسے کہ عمل جمع و تفریق، ضرب و تقسیم، جذر و مربع، لوکارتم و قوت نما، وغیرہ۔

اوپر ہم نے بتلایا ہے کہ

∫ (۴ لا + ۳) فر لا = ۲ لا^۲ + ۳ لا .... (۳)

یعنے اگر تفاعل ۲ لا^۲ + ۳ لا کو تفرق کیا جائے تو ۴ لا + ۳ حاصل ہوتا ہے۔ لیکن ہم کو معلوم ہے کہ

فر / فر لا (۲ لا^۲ + ۳ لا + ۱۰) = ۴ لا + ۳

پس تفاعل ۴ لا + ۳ کا تکملہ ۲ لا^۲ + ۳ لا + ۱۰ ابھی ہو سکتا ہے۔ اگر عدد ۱۰ کے بجائے ہم کوئی دوسرا عدد رکھیں تب بھی یہی نتیجہ نکلتا ہے اس لیے تکمل کا مذکورۂ بالا عمل اس طرح کامل طور پہ معیّن نہیں ہے جس طرح تفرق کا عمل معیّن ہے۔ یعنی اگر ہم کسی دیے ہوئے تفاعل کو تفرق کریں تو ہم نے دیکھا ہے کہ اس عمل سے ایک اور صرف ایک ہی تفاعل تفرقی سر کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔ اس کے برخلاف ہم اب دیکھتے ہیں کہ ایسے بے شمار تفاعل ہیں جن کو تفرق کرنے سے ایک دیا ہوا تفاعل حاصل ہو سکتا ہے — یہ تمام تفاعل ایک دوسرے سے بقدر ایک مستقل عدد کے مختلف ہوتے ہیں۔

اس لیے مساوات (۳) کی بجائے یہ لکھنا زیادہ صحیح ہے کہ

$\int$ (۴ لا + ۳) فرلا = ۲ لا^2 + ۳ لا + ک ....(۴)

جہاں ک ایک اختیاری عدد ہے جو $-\infty$ سے $+\infty$ تک تمام قیمتیں اختیار کر سکتا ہے۔ ک کو وہ تکمل کا مستقل " کہتے ہیں اور چونکہ مساوات (۴) میں ک بالکل معین نہیں بلکہ اختیاری ہے اس لیے ۲ لا^2 + ۳ لا + ک کو (۴ لا + ۳) کا " غیر معین تکملہ" کہتے ہیں۔

اس طرح عام طور پر اگر ایک تفاعل ف (لا) دیا ہوا ہو اور فہ (لا) اختیاری مستقل کو شامل کیے بغیر ایک ایسا تفاعل ہو کہ

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\ \text{فہ (لا)} = \text{ف (لا)}$$

تو ہم یوں لکھتے ہیں کہ

$$\int \text{ف (لا) فرلا} = \text{فہ (لا)} + \text{ک} \qquad (۵)$$

اور فہ (لا) + ک کو ف (لا) کا غیر معین تکملہ کہتے ہیں۔

۲ء۵ - ابتدائی معیاری شکلیں -

دفعہ ۶ء۳ باب سوم میں جن اہم تفاعلوں کے تفرقی سر ہم نے دریافت کیے ہیں ان کے مقلوب لینے سے ہم کو حسب ذیل تکملے فوراً حاصل ہوتے ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ تفرق کر کے ان میں سے ہر ایک نتیجہ کی تصدیق کرے اور آئندہ استعمال کے لیے انھیں بخوبی ذہن نشین کر لے۔

(۱) $\int$ م فرلا = م لا + ک جہاں م ایک دیا ہوا مستقل عدد ہے۔

(۲) $\int$ م ف(لا) فرلا = م $\int$ ف (لا) فرلا

(۳) $\int$ {ف$_1$ (لا) ± ف$_2$ (لا) ± ف$_3$ (لا) ± ....} فرلا

= $\int$ ف$_1$ (لا) فرلا ± $\int$ ف$_2$ (لا) فرلا ± $\int$ ف$_3$ (لا) فرلا + ...

(۴) $\int$ لا$^{\text{ن}}$ فرلا = $\frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}$ + ک جہاں ن کوئی مثبت منفی صحیح یا کسری عدد ہے سوائے ۔ ۱ کے۔

(۵) ∫ $\frac{۱}{\text{لا}}$ فرلا = لوک$_{\text{و}}$ لا + ک

(۶) ∫ ھو$^{\text{لا}}$ فرلا = ھو$^{\text{لا}}$ + ک

(۷) ∫ ا$^{\text{لا}}$ فرلا = $\frac{\text{ا}^{\text{لا}}}{\text{لوک ا}}$ + ک

(۸) ∫ جب لا فرلا = جم لا + ک

(۹) ∫ جم لا فرلا = ـ جب لا + ک

(۱۰) ∫ قط^{۲} لا فرلا = مس لا + ک

(۱۱) ∫ قم^{۲} لا فرلا = ـ مم لا + ک

(۱۲) ∫ مس لا قط لا فرلا = قط لا + ک

(۱۳) ∫ مم لا قم لا فرلا = ـ قم لا + ک

(۱۴) ∫ $\frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱ - \text{لا}^{۲}}}$ = جب$^{-۱}$ لا + ک

= ـ جم$^{-۱}$ لا + کَ

(۱۵) ∫ $\frac{\text{فرلا}}{۱ + \text{لا}^{۲}}$ = مس$^{-۱}$ لا + ک

= ـ مم$^{-۱}$ لا + کَ

(۱۶) ∫ $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}}$ = قط$^{-۱}$ لا + ک

= ـ قم$^{-۱}$ لا + کَ

ان کے علاوہ اور بھی چند آسان تکملے ہیں جن کی ہم کو اکثر ضرورت پڑتی ہے اور جن کی قیمت ہم اب معلوم کرینگے ۔

(۱۷) فرض کرو کہ ما = لوک قط لا، قط لا = ی، پس ما = لوک ی تب دفعہ ۶ء۳ کے حصۂ (۵) میں بتلائے ہوئے تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے

فر ما / فر لا = فر ما / فر ی × فر ی / فر لا = ۱/ی × مس لا قط لا = ۱/قط لا × مس لا قط لا

= مس لا

اس لیے معلوم ہوا کہ لوک قط لا وہ تفاعل ہے جس کا تفرقی سر مس لا ہے یعنے

∫ مس لا فر لا = لوک قط لا + ک

(۱۸) اگر ما = لوک جب لا، جب لا = ی پس ما = لوک ی

تو فر ما / فر لا = فر ما / فر ی × فر ی / فر لا = ۱/ی × جم لا = جم لا / جب لا = مم لا

اس لیے

∫ مم لا فر لا = لوک جب لا + ک

(۱۹) اگر ما = لوک (قط لا + مس لا)

تب

فر ما / فر لا = ۱ / (قط لا + مس لا) . (مس لا قط لا + قط² لا)

= قط لا (مس لا + قط لا) / (قط لا + مس لا) = قط لا

نیز اگر ما = لوک مس (لا/۲ + π/۴)، ی = مس (لا/۲ + π/۴)، ۶ = لا/۲ + π/۴

تو ی = مس ۶، ما = لوک ی

اس لیے

فر ما / فر لا = فر ما / فر ی × فر ی / فر ۶ × فر ۶ / فر لا

پس فر ما / فر لا = ۱/ی × قط² ۶ × ۱/۲ = ۱/۲ قط² (لا/۲ + π/۴) / مس (لا/۲ + π/۴)

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\frac{\text{جم}\left(\frac{\text{لا}}{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۴}}\right)}{\text{جب}\left(\frac{\text{لا}}{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۴}}\right)} \times \frac{\text{۱}}{\text{جم}^{\text{۲}}\left(\frac{\text{لا}}{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۴}}\right)}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲ جب}\left(\frac{\text{لا}}{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۴}}\right)\text{جم}\left(\frac{\text{لا}}{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۴}}\right)}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{جب}\left(\text{۲}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}+\text{۲}\frac{\pi}{\text{۴}}\right)} = \frac{\text{۱}}{\text{جب}\left(\text{لا}+\frac{\pi}{\text{۲}}\right)} = \frac{\text{۱}}{\text{جم لا}}$$

$$= \text{قط لا}$$

پس

$$\int \text{قط لا فرلا} = \text{لوک (مس لا + قط لا) + ک}$$

$$= \text{لوک مس}\left(\frac{\text{لا}}{\text{۲}}+\frac{\pi}{\text{۴}}\right) + \text{کَ}$$

$$\text{(۲۰) اگر ما = لوک (قم لا - مم لا)}$$

$$\text{تو}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{۱}}{\text{قم لا - مم لا}}\left(\text{- قم لا مم لا + قم}^{\text{۲}}\ \text{لا}\right)$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{قم لا - مم لا}} \times \text{قم لا (قم لا - مم لا)} = \text{قم لا}$$

$$\text{نیز اگر ما} = \text{لوک مس}\ \frac{\text{لا}}{\text{۲}}$$

$$\text{تو}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{۱}}{\text{مس}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}} \times \text{قط}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}} \times \frac{\text{۱}}{\text{۲}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} \times \frac{\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}}{\text{جب}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}} \times \frac{\text{۱}}{\text{جم}^{\text{۲}}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۲ جب}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}\,\text{جم}\frac{\text{لا}}{\text{۲}}} = \frac{\text{۱}}{\text{جب لا}} = \text{قم لا}$$

پس

$$\int \text{قم لا فرلا} = \text{لوک (قم لا - مم لا) + ک}$$

$$= \text{لوک مس}\ \frac{\text{لا}}{\text{۲}} + \text{کَ}$$

(۲۱) اگر $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{2}\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{2}\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}\right)$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2} + \frac{\text{لا}}{2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}\right) + \frac{\text{ا}^2}{2}\,\frac{1+\frac{1}{2}\,\frac{2\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2} + \frac{\text{لا}^2}{2\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}} + \frac{\text{ا}^2}{2\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2} = \sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}$$

پس

$$\int\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}\;\text{فرلا} = \frac{\text{لا}}{2}\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{2}\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}\right)+\text{ک}$$

(۲۲) بالکل اسی طرح ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\int\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}\;\text{فرلا} = \frac{\text{لا}}{2}\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2} - \frac{\text{ا}^2}{2}\,\text{لوک}\left(\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}\right)+\text{ک}$$

(۲۳) اگر $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{2}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{2}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

$$\text{تو}\;\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} + \frac{\text{لا}}{2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{-2\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}\right) + \frac{\text{ا}^2}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}}\times\frac{1}{\text{ا}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\text{لا}^2}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} + \frac{\text{ا}^2}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} = \sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}$$

پس

$$\int\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}\;\text{فرلا} = \frac{\text{لا}}{2}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{2}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\text{ک}$$

(۲۴) اگر $\text{ما} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

$$\text{تو}\;\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ا}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}\times\frac{1}{\text{ا}} = \frac{1}{\text{ا}^2+\text{لا}^2}$$

پس

$$\int\frac{1}{\text{ا}^2+\text{لا}^2}\;\text{فرلا} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\text{ک}$$

(۲۵) اگر $\text{ما} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}+\text{لا}}{\text{ا}-\text{لا}}$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2\text{ا}} \cdot \frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{ا}+\text{لا}} \cdot \frac{(\text{ا}-\text{لا})1+(\text{ا}+\text{لا})1}{(\text{ا}-\text{لا})^2}$

$= \frac{1}{2\text{ا}} \cdot \frac{\text{ا}-\text{لا}}{\text{ا}+\text{لا}} \cdot \frac{2\text{ا}}{(\text{ا}-\text{لا})^2} = \frac{1}{\text{ا}^2-\text{لا}^2}$

پس $\int \frac{1}{\text{ا}^2-\text{لا}^2}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ا}+\text{لا}}{\text{ا}-\text{لا}} + \text{ک}$

(۲۶) اگر $\text{ما} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}}$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{2\text{ا}} \cdot \frac{\text{لا}+\text{ا}}{\text{لا}-\text{ا}} \cdot \frac{(\text{لا}+\text{ا})-(\text{لا}-\text{ا})}{(\text{لا}+\text{ا})^2} = \frac{1}{\text{لا}-\text{ا}}\,\frac{1}{\text{لا}+\text{ا}}$

$= \frac{1}{\text{لا}^2-\text{ا}^2}$

پس $\int \frac{1}{\text{لا}^2-\text{ا}^2}\,\text{فرلا} = \frac{1}{2\text{ا}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{لا}-\text{ا}}{\text{لا}+\text{ا}} + \text{ک}$

(۲۷) اگر $\text{ما} = \text{لوک}\,(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2})$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}} \times \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{2\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}\right)$

$= \frac{1}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}} \times \frac{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}+\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}$

پس $\int \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2+\text{ا}^2}) + \text{ک}$

(۲۸) اگر $\text{ما} = \text{لوک}\,(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2})$

تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}} \times \left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{2\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}$

پس $\int \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}}\,\text{فرلا} = \text{لوک}\,(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2-\text{ا}^2}) + \text{ک}$

(۲۹) اگر $\text{ما} = \text{جب}^{-1}\,\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

تو
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}} \times \frac{1}{\text{ا}} = \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} \times \frac{1}{\text{ا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$$

پس
$$\int \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}} \, \text{فرلا} = \text{جب}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{ک}$$

یہی بنیادی تکملے ہیں جنھیں طالب علم کو اچھی طرح ذہن نشین کرنا اور یاد رکھنا چاہیے۔ اکثر و بیشتر پیچیدہ تفاعلوں کے تکملے انہی کی مدد سے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔ کسی دیے ہوئے تفاعل کو تکمل کرنے کے لیے سب سے پہلے ہمیں یہ غور کرنا چاہیے کہ آیا وہ ان معیاری شکلوں میں سے کسی شکل کا ہے یا نہیں۔ اگر ہے تو ہم فوراً تکملہ لکھ دے سکتے ہیں۔ اگر دیا ہوا تفاعل اوپر کی معیاری شکلوں میں سے کسی شکل کا نہیں ہے تو پھر کوشش کرنا چاہیے کہ کسی طرح کی تبدیلی وغیرہ کر کے اِن تفاعلوں کو اوپر کی شکلوں میں سے کسی ایک میں یا ان میں سے چند کے مجموعہ میں تحویل کریں اور اس طرح تکملہ معلوم کریں۔ آیندہ دفعات میں ہم چند سادہ طریقے بتلائینگے جن کی مدد سے دیے ہوئے تکملوں کو معیاری شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ اس طرح سے صرف چند تفاعل ہی تکمل ہو سکتے ہیں۔ تفاعلوں کی ایک بہت بڑی تعداد ایسی ہے جن کو ہم کسی معلومہ معیاری شکل میں تحویل نہیں کر سکتے۔ ایسے تفاعلوں کے تکملے اُن تفاعلوں کی رقوم میں جن سے ہم اب تک واقف ہیں وجود نہیں رکھتے۔

اس طرح عملِ تفرق اور عملِ تکمل میں بنیادی فرق ہے۔ ہر طرح کے تفاعل کو خواہ وہ جبری یا مثلثی یا قوت نمائی یا لوکارثمی یا ان میں سے بعض یا سب کا مرکب ہو ہم تفرق کر سکتے ہیں اور حاصل تفاعل اسی طرح کا ایک تفاعل ہوتا ہے لیکن سوائے چند خاص آسان صورتوں کے کسی عام تفاعل کو تکمل نہیں کر سکتے۔ تاہم ہماری عملی ضروریات کے لیے جس قدر تفاعلوں کی ضرورت پڑتی ہے اُن میں سے اکثر تفاعلوں کو تکمل کیا جا سکتا ہے۔ اس کے علاوہ ہر تفاعل کی جس حد تک چاہیں تقریبی قیمت معلوم

کی جا سکتی ہے۔

مشقی سوالات ۲۲

ذیل کے تفاعلوں کا غیر معیّن تکملہ لکھو:—

(۱) $\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}$　　　(۲) $\text{لا}^{۳} - ۳\,\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} - ۷$

(۳) $\dfrac{\text{ا}\,\text{لا} - \text{ب}\sqrt{\text{لا}}}{\text{لا}}$　　　(۴) $\dfrac{\text{لا}^{۴} - ۱۰\,\text{لا}^{۲} + ۵}{\text{لا}^{۲}}$

(۵) $\left(۱ - \dfrac{۱}{\sqrt{\text{لا}}}\right)^{۲}$　　　(۶) $\dfrac{۱}{\text{لا}^{۲} - ۲}$

(۷) $\dfrac{۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲} + ۳}}$　　　(۸) $\dfrac{۱}{\sqrt{۴ - \text{لا}^{۲}}}$

(۹) $\dfrac{۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲} + ۹}}$　　　(۱۰) $\sqrt{۱۰۰ - ۴\,\text{لا}^{۲}}$

(۱۱) $\text{مس}^{۲}\,\text{ط}$　　　(۱۲) $\text{مم}\,\text{ط} + \text{قم}\,\text{ط}$

(۱۳) $\text{مم}^{۲}\,\text{ط} + \text{قم}^{۲}\,\text{ط}$　　　(۱۴) $\text{لا}^{\text{ا}} + ۱۰^{\text{لا}}$

۵٫۳ - متغیر کی تبدیلی —

تکمل کے لیے اکثر ایسے تفاعل بھی دیے جاتے ہیں جو بندا ہر دفعہ ۵٫۲ کی معیاری شکلوں میں سے کسی شکل کے نہیں ہوتے لیکن متغیر کو بدل کر ہم ان کو کسی معیاری شکل میں لا سکتے ہیں۔ اس طریقہ کو پہلے ہم چند آسان مثالوں کے ذریعہ سے واضح کرینگے اور پھر اس کا عام قاعدہ بتلائینگے۔

مثال ۱- $(\text{لا} + \text{ا})^{۲}$ کو تکمل کرو۔ ا کوئی مستقل عدد ہے۔

رکھو　$\text{ما} = \text{لا} + \text{ا}$　یعنے　$\text{لا} = \text{ما} - \text{ا}$

تو　$\dfrac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = ۱$　یعنے　$\text{فرلا} = \text{فرما}$

اس لیے
$$\int (\text{لا} + \text{ا})^{۲}\,\text{فرلا} = \int \text{ما}^{۲}\,\text{فرما} = \frac{۱}{۳}\,\text{ما}^{۳} + \text{ک}$$
$$= \frac{۱}{۳}(\text{لا} + \text{ا})^{۳} + \text{ک} \quad \ldots\ldots (۱)$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ $(\text{لا} + \text{ا})^{۲}$ کوئی معیاری تفاعل نہیں ہے لیکن ہم اس کو فوراً معیاری شکل کے تفاعل میں تبدیل کر دے سکتے ہیں اگر لا کی بجائے ما - ا رکھا جائے۔

البتہ اس مثال میں خاص طور پر ایک ایسا تفاعل دیا گیا ہے جس کو ہم ابتدائی طریقوں سے بھی حل کر سکتے ہیں کیونکہ

$$\int (\text{لا} + \text{ا})^{۲}\,\text{فرلا} = \int (\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{الا} + \text{ا}^{۲})\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۳}\,\text{لا}^{۳} + ۲\,\text{ا}\,\frac{\text{لا}^{۲}}{۲} + \text{ا}^{۲}\,\text{لا} + \text{کَ}$$

طالب علم پھیلا کر یہ تصدیق کر سکتا ہے کہ اوپر کے تکملہ (۱) اور اس آخری جملہ میں صرف ایک مستقل رقم کا فرق ہے اور چونکہ ک اور کَ اختیاری مستقل ہیں اس لیے اس مستقل رقم کو کَ میں شامل فرض کر سکتے ہیں۔

مثال ۲ - $\frac{۱}{\text{الا} + \text{ب}}$ کو تکمل کرو۔ ا اور ب مستقل ہیں۔

رکھو $\text{الا} + \text{ب} = \text{ما}$ یعنے $\text{لا} = \frac{۱}{\text{ا}}(\text{ما} - \text{ب})$ پس $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{۱}{\text{ا}}$،

$$\text{فرلا} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\,\text{فرما} = \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{فرما}$$

اس لیے
$$\int \frac{۱}{\text{الا} + \text{ب}}\,\text{فرلا} = \int \frac{۱}{\text{ما}}\,\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{فرما} = \frac{۱}{\text{ا}} \int \frac{۱}{\text{ما}}\,\text{فرما}$$
$$= \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{لوک}\,\text{ما} + \text{ک} = \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{لوک}\,(\text{الا} + \text{ب}) + \text{ک}$$

مثال ۳ - $\frac{۲\,\text{الا} + \text{ب}}{\text{الا}^{۲} + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}}$ کو تکمل کرو۔ ا، ب، ج مستقل ہیں۔

اس کسر میں ہمیں دیکھتے ہی معلوم ہوتا ہے کہ شمار کنندہ، نسب نما کا تفرقی سر ہے

پس اگر ہم رکھیں

ما = ا لا² + ب لا + ج، تو فرما/فرلا = ۲ ا لا + ب، فرلا/فرما = ۱/(۲ ا لا + ب)

فرلا = (فرلا/فرما) = ۱/(۲ ا لا + ب) فرما یعنے (۲ ا لا + ب) فرلا = فرما

اس لیے ∫ (۲ ا لا + ب)/(ا لا² + ب لا + ج) فرلا = ∫ (۱/ما) فرما = لوک ما + ک

= لوک (ا لا² + ب لا + ج) + ک

اس سے ہمیں عام طور پر یہ قاعدہ ملتا ہے کہ

∫ فَ(لا)/ف(لا) فرلا = لوک ف(لا) + ک

مثال ۴ - (ا لا² + ب لا + ج)^ن (۲ ا لا + ب) کو تکمل کرو - ن کوئی مثبت منفی صحیح یا کسری عدد ہے بشرطیکہ ن ≠ -۱

اس مثال میں بھی ہم دیکھتے ہیں کہ ۲ لا + ب جملۂ ا لا² + ب لا + ج کا تفرقی سر ہے، اس لیے اگر ہم رکھیں

ما = ا لا² + ب لا + ج تو اوپر کے عمل سے حاصل ہوتا ہے (۲ ا لا + ب) فرلا = فرما

پس ∫ (ا لا² + ب لا + ج)^ن (۲ ا لا + ب) فرلا = ∫ ما^ن فرما = ما^(ن+۱)/(ن + ۱) + ک

= (ا لا² + ب لا + ج)^(ن+۱)/(ن + ۱) + ک

اس مثال میں اگر طالب علم ن کی قیمت مثلاً ۱۰ لے اور پھیلانے اور ضرب دینے کے بعد اس تکملہ کی قیمت دریافت کرے تو معلوم ہو جائیگا کہ عمل ابدال کے ذریعہ قیمت معلوم کرنے میں کس قدر سہولت ہوتی ہے - اسی طرح

∫ {ف(لا)}^ن فَ(لا) فرلا = {ف(لا)}^(ن+۱)/(ن + ۱) + ک بشرطیکہ ن ≠ -۱

مثال ۵۔ $\frac{1}{لا^2 + 6لا + 18}$ کو تکمل کرو۔

معیاری شکلوں کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر متکمل جملہ اس طرح کا ہو کہ $\frac{1}{(متغیر)^2 \pm (مستقل)^2}$ تو ہم اس کا تکملہ فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پس ہم یہ کوشش کرتے ہیں کہ جملہ $لا^2 + 6\ لا + 18$ کو اس شکل میں لائیں۔ اس کے لیے پہلے $لا^2 + 6\ لا$ کو لے کر کامل مربع بنا لینا کافی ہے۔ اس طرح

$$لا^2 + 6لا + 18 = (لا + 3)^2 + (18 - 9) = (لا + 3)^2 + 9$$

پھر اگر ہم رکھیں

$$ما = لا + 3،\ لا = ما - 3،\ \frac{فرلا}{فرما} = 1،\ فرلا = فرما$$

تو

$$\int \frac{1}{لا^2 + 6لا + 18}\ فرلا = \int \frac{1}{(لا + 3)^2 + 9}\ فرلا$$

$$= \int \frac{1}{ما^2 + 9}\ فرما = \int \frac{1}{ما^2 + 3^2}\ فرما$$

$$= \frac{1}{3}\ مس^{-1}\ \frac{ما}{3} + ک$$

$$= \frac{1}{3}\ مس^{-1}\left(\frac{لا + 3}{3}\right) + ک$$

مثال ۶۔ $\frac{1}{\sqrt{الا^2 + ب\ لا + ج}}$ کو تکمل کرو، ا، ب، ج، کوئی مستقل ہیں۔

معیاری شکلوں سے معلوم ہے کہ $\frac{1}{\sqrt{(متغیر)^2 \pm (مستقل)^2}}$، $\frac{1}{\sqrt{(مستقل)^2 - (متغیر)^2}}$ کی شکل کے جملوں کے تکملے ہم فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پس ہماری کوشش ہوتی ہے کہ دیے ہوئے جملوں کو اس قسم کے کسی جملہ میں تبدیل کریں۔ پھر اس کی دو صورتیں

پیدا ہوتی ہیں ایک وہ جس میں ا مثبت ہو اور دوسری وہ صورت جس میں ا منفی ہو۔ ہم عددی مثالوں کے ذریعہ ان دونوں صورتوں میں طرز عمل کو واضح کرینگے۔

صورت اوّل۔ $\frac{۱}{\sqrt{۹\text{لا}^۲ - ۶\text{لا} + ۳۷}}$

اب جملہ $۹\text{لا}^۲ - ۶\text{لا} + ۳۷$ کو ہم اس طرح بدل سکتے ہیں کہ

$$۹\text{لا}^۲ - ۶\text{لا} + ۳۷ = ۹\left(\text{لا}^۲ - \frac{۲}{۳}\text{لا} + \frac{۳۷}{۹}\right) = ۹\left\{\left(\text{لا}^۲ - \frac{۲}{۳}\text{لا}\right) + \frac{۳۷}{۹}\right\}$$

ہم چاہتے ہیں کہ چھوٹی قوسوں کے اندرونی جملہ کو کامل مربع بنائیں پس

$$۹\text{لا}^۲ - ۶\text{لا} + ۳۷ = ۹\left\{\left(\text{لا}^۲ - \frac{۲}{۳}\text{لا} + \frac{۱}{۹}\right) - \frac{۱}{۹} + \frac{۳۷}{۹}\right\}$$

$$= ۹\left\{\left(\text{لا} - \frac{۱}{۳}\right)^۲ + ۴\right\}$$

پھر اگر ہم رکھیں $\text{لا} - \frac{۱}{۳} = \text{ما}$ یعنے $\text{لا} = \text{ما} + \frac{۱}{۳}$

تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = ۱$ اور $\text{فرلا} = \text{فرما}$

اس لیے

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۹\text{لا}^۲ - ۶\text{لا} + ۳۷}} = \frac{۱}{۳}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\left(\text{لا} - \frac{۱}{۳}\right)^۲ + ۴}}$$

$$= \frac{۱}{۳}\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ما}^۲ + ۲^۲}}$$

$$= \frac{۱}{۳}\left\{\text{لوک}\left(\text{ما} + \sqrt{\text{ما}^۲ + ۴}\right)\right\} + \text{ک}$$

$$= \frac{۱}{۳}\text{لوک}\left\{\left(\text{لا} - \frac{۱}{۳}\right) + \sqrt{\left(\text{لا} - \frac{۱}{۳}\right)^۲ + ۴}\right\} + \text{ک}$$

صورت دوم۔ $\frac{۱}{\sqrt{۲۲۱ - ۲۰۰\text{لا} - ۲۵\text{لا}^۲}}$

جملہ ۲۲۱ - ۲۰ لا - ۲۵ لا² کو معیاری شکل میں لانے کے لیے اس طرح تبدیل کر سکتے ہیں کہ

$$\text{۲۲۱} - \text{۲۰ لا} - \text{۲۵ لا}^{۲} = \text{۲۵}\left(\frac{\text{۲۲۱}}{\text{۲۵}} - \frac{\text{۴}}{\text{۵}}\text{لا} - \text{لا}^{۲}\right) = \text{۲۵}\left\{\frac{\text{۲۲۱}}{\text{۲۵}} - \left(\text{لا}^{۲} + \frac{\text{۴}}{\text{۵}}\text{لا}\right)\right\}$$

اب ہم چاہتے ہیں کہ چھوٹی قوسوں کے اندرونی جملہ کو کامل مربع بنائیں اس لیے

$$\text{۲۲۱} - \text{۲۰ لا} - \text{۲۵ لا}^{۲} = \text{۲۵}\left\{\frac{\text{۲۲۱}}{\text{۲۵}} - \left(\text{لا}^{۲} + \frac{\text{۴}}{\text{۵}}\text{لا} + \frac{\text{۴}}{\text{۲۵}}\right) + \frac{\text{۴}}{\text{۲۵}}\right\}$$

$$= \text{۲۵}\left\{\frac{\text{۲۲۵}}{\text{۲۵}} - \left(\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\right)^{۲}\right\} = \text{۲۵}\left\{\text{۹} - \left(\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\right)^{۲}\right\}$$

اب رکھو $\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}} = \text{ما}$ یعنے $\text{لا} = \text{ما} - \frac{\text{۲}}{\text{۵}}$ تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{۱}$، فرلا = فرما

پس

$$\int \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲۲۱} - \text{۲۰ لا} - \text{۲۵ لا}^{۲}}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\int \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۹} - \left(\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\right)^{۲}}}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\int \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۹} - \text{ما}^{۲}}}\,\text{فرما}$$

$$= \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\,\text{جب}^{-۱}\frac{\text{ما}}{\text{۳}} + \text{ک} = \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\,\text{جب}^{-۱}\frac{\text{لا} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}}{\text{۳}} + \text{ک}$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ اگر متکمل کوئی دوسرے درجہ کا جملہ یا اس کی قوت $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ یا اس کی قوت $-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ یا اس کی قوت $-\text{۱}$ ہو یعنے اگر $\text{س} = \text{ا لا}^{۲} + \text{ب لا} + \text{ج}$ تو س، $\frac{\text{۱}}{\text{س}}$، $\sqrt{\text{س}}$، $\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{س}}}$ کو ہمیشہ تکمل کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۷ - بعض اوقات ایک سے زیادہ مرتبہ متغیر کو بدلنا پڑتا ہے۔
اس کی مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم جملہ $\frac{\text{لا}}{\text{لا}^{۴} + \text{۲ لا}^{۲} + \text{۲}}$ کو تکمل کرنا چاہتے ہیں۔

اس جملہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ شمار کنندہ، نسب نما کا کامل تفرقی سر نہیں ہے۔ لیکن نسب نما میں صرف لا کی جفت قوتیں داخل ہیں کوئی طاق قوت نہیں ہے اس لیے متغیر کو بدل کر $\text{لا}^{۲} = \text{ما}$ رکھتے ہیں جس سے ملتا ہے

$$\frac{فرما}{فرلا} = ۴\,لا،\quad \frac{فرلا}{فرما} = \frac{۱}{۲\,لا}،\quad ۲\,لا\,فرلا = فرما \text{ یعنے } لا\,فرلا = \frac{۱}{۲}\,فرما$$

پس $\int \frac{لا\,فرلا}{لا^{۴} + ۲\,لا^{۲} + ۲} = \frac{۱}{۲} \int \frac{فرما}{ما^{۲} + ۲\,ما + ۲}$

اب بھی بائیں جانب کا تکملہ معیاری شکل کا نہیں ہے لیکن مثال ۵ میں بتلائی ہوئی شکل کا ہے اس لیے اس کو حل کرنے کے لیے وہی طریقہ اختیار کیا جا سکتا ہے جو مثال ۵ میں کیا گیا تھا۔

جملہ $ما^{۲} + ۲\,ما + ۲ = (ما + ۱)^{۲} + ۱$

پس اگر ہم رکھیں $ی = ما + ۱،\quad \frac{فری}{فرما} = ۱،\quad فرما = فری$

اس لیے دیا ہوا تکملہ

$$= \frac{۱}{۲} \int \frac{فرما}{ما^{۲} + ۲\,ما + ۱} = \frac{۱}{۲} \int \frac{فری}{ی^{۲} + ۱}$$

$$= \frac{۱}{۲}\,مس^{-۱}\,ی + ک$$

$$= \frac{۱}{۲}\,مس^{-۱}\,(ما + ۱) + ک$$

$$= \frac{۱}{۲}\,مس^{-۱}\,(لا^{۲} + ۱) + ک$$

مثال ۸ ۔ $\frac{۳\,لا - ۲}{\sqrt{۴\,لا^{۲} - ۴\,لا + ۵}}$ کو تکمل کرو ۔

نسب نما میں کے جملہ $۴\,لا^{۲} - ۴\,لا + ۵$ کا تفرقی سر $۸\,لا - ۴$ ہوتا ہے، شمار کنندہ میں جملہ $۳\,لا - ۲$ ہے ۔ ہم چاہتے ہیں کہ اس میں لا کا سر ۸ بنائیں لیکن اس طرح کہ جملہ میں کوئی فرق بھی نہ آئے تو ظاہر ہے کہ ہمیں اس کو $\frac{۸}{۳}$ سے ضرب اور تقسیم کرنا چاہیے اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۳\text{لا} - ۲}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}} = \frac{۳}{۸}\,\frac{\frac{۸}{۳}(۳\text{لا} - ۲)}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}} = \frac{۳}{۸}\,\frac{۸\text{لا} - \frac{۱۶}{۳}}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}}$$

$$= \frac{۳}{۸}\,\frac{(۸\text{لا} - ۴) + (۴ - \frac{۱۶}{۳})}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}}$$

$$= \frac{۳}{۸}\,\frac{۸\text{لا} - ۴}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}} - \frac{۱}{۲}\,\frac{۱}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}} \quad (۱)$$

اب بائیں طرف کے پہلے جملہ کو ہم فوراً تکمل کر سکتے ہیں کیونکہ اگر ف (لا) = ۴ لا² - ۴ لا + ۵ رکھیں تو یہ جملہ $\frac{۳}{۸}\{\text{ف}(\text{لا})\}^{-\frac{۱}{۲}}\,\text{فَ}(\text{لا})$ ہے جو مثال (۴) میں بتلائے ہوئے طریقہ سے حل ہو سکتا ہے۔ پس

$$\frac{۳}{۸}\int \frac{۸\text{لا} - ۴}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}}\,\text{فرلا} = \frac{۳}{۸}\,\frac{(۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵)^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}$$

$$= \frac{۳}{۴}\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵} \quad (۲)$$

مساوات (۱) میں بائیں طرف کے دوسرے جملہ کو تکمل کرنے کے لیے جملہ ۴ لا² - ۴ لا + ۵ کو تبدیل کرنا چاہیے اس لیے

$$۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵ = ۴(\text{لا}^۲ - \text{لا} + \tfrac{۵}{۴}) = ۴\left\{(\text{لا}^۲ - \text{لا}) + \tfrac{۵}{۴}\right\}$$

$$= ۴\left\{(\text{لا}^۲ - \text{لا} + \tfrac{۱}{۴}) + ۱\right\} = ۴\left\{(\text{لا} - \tfrac{۱}{۲})^۲ + ۱\right\}$$

پس اگر یہ لکھا جائے ما = لا - ½، فرما = فرلا تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}\int \frac{\text{فرما}}{\sqrt{\text{ما}^۲ + ۱}} = \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\left(\text{ما} + \sqrt{\text{ما}^۲ + ۱}\right)$$

$$= \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\left\{\text{لا} - \tfrac{۱}{۲} + \sqrt{(\text{لا} - \tfrac{۱}{۲})^۲ + ۱}\right\} \quad (۳)$$

بالآخر (۲) اور (۳) کو (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int \frac{۳\text{لا} - ۲}{\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵}}\,\text{فرلا} = \frac{۳}{۴}\sqrt{۴\text{لا}^۲ - ۴\text{لا} + ۵} - \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\left\{\text{لا} - \tfrac{۱}{۲} + \sqrt{(\text{لا} - \tfrac{۱}{۲})^۲ + ۱}\right\} + \text{ک}$$

مثال ۹ - جم ن طہ کو تکمل کرو جہاں ن کوئی ثبت منفی صحیح یا کسری عدد ہے - اس کو معیاری شکل میں لانے کے لیے ظاہر ہے کہ حسب ذیل ابدال کرنا چاہیے :

$$عہ = ن\ طہ،\quad طہ = \frac{1}{ن}\ عہ،\quad \frac{فرطہ}{فرعہ} = \frac{1}{ن}،\quad فرطہ = \frac{1}{ن}\ فرعہ$$

$$پس\quad \int جم ن\ طہ\ فرطہ = \frac{1}{ن}\int جم\ عہ\ فرعہ = \frac{جب\ عہ}{ن} + ک$$

$$= \frac{جب\ ن\ طہ}{ن} + ک$$

جب ن طہ، مس ن طہ، وغیرہ، دوسری مثلثی نسبتوں کو بھی اسی طرح تکمل کیا جا سکتا ہے -

مثال ۱۰ - جب^2 طہ کو تکمل کرو -

اب تک ہم کو مثلثی تفاعلوں کی قوتوں کو تکمل کرنے کا قاعدہ معلوم نہیں - لیکن گزشتہ مثال میں ہم نے دیکھا ہے کہ ضعفی زاویوں کے مثلثی تفاعلوں کو کس طرح تکمل کیا جا سکتا ہے - پس ہماری یہ کوشش ہوتی ہے کہ کسی مثلثی تفاعل کی قوت کو ضعفی زاویہ کے تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے - ہمیں معلوم ہے کہ

$$ا - جم\ ۲\ طہ = ۲\ جب^2\ طہ\quad پس\quad جب^2\ طہ = \frac{1}{2}\ (ا - جم\ ۲\ طہ)$$

$$اس\ لیے\quad \int جب^2\ طہ\ فرطہ = \frac{1}{2}\int (ا - جم\ ۲\ طہ)\ فرطہ$$

$$یعنے\quad \int جب^2\ طہ\ فرطہ = \frac{1}{2}\int فرطہ - \frac{1}{2}\int جم\ ۲\ طہ\ فرطہ$$

$$= \frac{1}{2}\ طہ - \frac{1}{2}\cdot\frac{جب\ ۲\ طہ}{2} + ک$$ (گزشتہ مثال میں ن = ۲ رکھنے سے) اسی طرح اگر جب^4 طہ کو تکمل کرنا ہو تو اس کو جب ۲ طہ اور جب ۴ طہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں -

$$جب^4\ طہ = (جب^2\ طہ)^2 = \left(\frac{ا - جم\ ۲\ طہ}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ (ا - ۲\ جم\ ۲\ طہ + جم^2\ ۲\ طہ)$$

لیکن

$$\text{۱} + \text{جم ۴ طہ} = \text{۲ جم}^{\text{۲}}\ \text{۲ طہ}$$

پس

$$\text{جب}^{\text{۴}}\ \text{طہ} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\left\{\text{۱} - \text{۲ جم ۲ طہ} + \frac{\text{۱} + \text{جم ۴ طہ}}{\text{۲}}\right\}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۸}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{جم ۲ طہ} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\text{جم ۴ طہ}$$

اس لیے

$$\int \text{جب}^{\text{۴}}\ \text{طہ فرطہ} = \int\left(\frac{\text{۳}}{\text{۸}} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\text{جم ۲ طہ} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\text{جم ۴ طہ}\right)\text{فرطہ}$$

$$= \frac{\text{۳}}{\text{۸}}\text{طہ} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\frac{\text{جب ۲ طہ}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۸}}\,\frac{\text{جب ۴ طہ}}{\text{۴}} + \text{ک}$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جب طہ یا جم طہ کی جفت قوتوں کو تکمل کیا جا سکتا ہے اگرچہ بڑی قوتوں کے لیے یہ عمل بہت طویل ہو جاتا ہے۔

مثال ۱۱ - اس مثال میں ہم جب طہ اور جم طہ کی طاق قوتوں کو تکمل کرنے کا قاعدہ بتلائینگے۔ فرض کرو کہ ہم $\text{جم}^{\text{۵}}$ طہ کو تکمل کرنا چاہتے ہیں۔ اس کو یوں لکھ سکتے ہیں:

$$\text{جم}^{\text{۵}}\ \text{طہ} = \text{جم}^{\text{۴}}\ \text{طہ جم طہ} = \left(\text{جم}^{\text{۲}}\ \text{طہ}\right)^{\text{۲}}\ \text{جم طہ}$$

$$= \left(\text{۱} - \text{جب}^{\text{۲}}\ \text{طہ}\right)^{\text{۲}}\ \text{جم طہ} = \left(\text{۱} - \text{۲ جب}^{\text{۲}}\ \text{طہ} + \text{جب}^{\text{۴}}\ \text{طہ}\right)\text{جم طہ}$$

پس

$$\int \text{جم}^{\text{۵}}\ \text{طہ فرطہ} = \int \text{جم طہ فرطہ} - \text{۲}\int \text{جب}^{\text{۲}}\ \text{طہ جم طہ فرطہ} + \int \text{جب}^{\text{۴}}\ \text{طہ جم طہ فرطہ}$$

بائیں طرف کے جملہ کو تکمل کرنے کے لیے ذیل کی تبدیلی کرو:

$$\text{لا} = \text{جب طہ}،\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} = \text{جم طہ}،\quad \text{فرلا} = \text{جم طہ فرطہ}$$

پس

$$\int \text{جم}^{\text{۵}}\ \text{طہ فرطہ} = \int \text{فرلا} - \text{۲}\int \text{لا}^{\text{۲}}\ \text{فرلا} + \int \text{لا}^{\text{۴}}\ \text{فرلا}$$

$$= \text{لا} - \text{۲}\,\frac{\text{لا}^{\text{۳}}}{\text{۳}} + \frac{\text{لا}^{\text{۵}}}{\text{۵}} + \text{ک}$$

$$= \text{جب طہ} - \frac{\text{۲}}{\text{۳}}\text{جب}^{\text{۳}}\ \text{طہ} + \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\text{جب}^{\text{۵}}\ \text{طہ} + \text{ک}$$

مذکورہ بالا مثالوں سے متغیر کو تبدیل کرنے کا قاعدہ بخوبی ذہن نشین ہو گیا ہوگا۔ اب ہم اس کا ایک ثبوت دینگے جو اگرچہ بالکل باضابطہ نہیں ہے لیکن موجودہ منزل پر طالب علم کی ضرورت کے لیے کافی ہے۔

فرض کرو کہ ہم تفاعل و = ف (لا) کو تکمل کرنا چاہتے ہیں اور اس کو معیاری شکل میں لانے کے لیے لا کی بجائے ایک نیا متغیر ع حسب ذیل رشتہ کی مدد سے داخل کرتے ہیں:-

$$لا = فہ\ (ع)\ ،\ \frac{فرلا}{فرع} = فہَ\ (ع)$$

فرض کرو کہ

$$ی = \int ف\ (لا)\ فرلا \quad یعنے \quad \frac{فری}{فرلا} = ف\ (لا) = و$$

تو چونکہ ی، لا کا ایک تفاعل ہے اور اوپر کے تغیر کے باعث لا، ع کا ایک تفاعل ہے اس لیے ی بھی ع کا تفاعل ہوگا اور اس لیے تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{فری}{فرع} = \frac{فری}{فرلا} \cdot \frac{فرلا}{فرع} = و\ \frac{فرلا}{فرع}$$

جس میں و اور $\frac{فرلا}{فرع}$ دونوں کو نئے متغیر ع کی رقوم میں بیان کرنا چاہیئے۔

پس

$$ی = \int و\ \frac{فرلا}{فرع}\ فرع$$

یعنے

$$\int ف\ (لا)\ فرلا = \int ف \left\{ فہ\ (ع) \right\}\ فہَ\ (ع)\ فرع$$

جو متغیر کی تبدیلی کا مطلوبہ قاعدہ ہے جس کو ہم نے گزشتہ مثالوں میں استعمال کیا ہے۔ طالب علم کو چاہیئے کہ ایک غیر معیّن تکملہ میں آخری جواب ہمیشہ ابتدائی متغیر یعنے لا کی رقوم میں بیان کرے اگرچہ اصلی عمل تکمل متغیر ع کی مدد سے کیا گیا ہو۔

مشقی سوالات ۲۳

ذیل کے تفاعلوں کو تکمل کرو:-

(۱) $\frac{\text{لا}^{۳}}{۲\text{لا} - ۱}$ (۲) $\frac{۱}{۲ - \text{لا} - \text{لا}^{۲}}$

(۳) $\frac{۱ - \text{لا}}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^{۲}}$ (۴) $\frac{۱}{\text{لا} + \text{لا}^{۲}}$

(۵) $\frac{۱}{\sqrt{\text{لا} - \text{لا}^{۲}}}$ (۶) $\frac{۲\text{لا} + ۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}}$

(۷) $\frac{\text{لا}^{۲}}{\sqrt{\text{لا}^{۶} - ۶\text{لا}^{۳} + ۵}}$ (۸) $\frac{۳\text{لا} + ۲}{\sqrt{۱۹ - ۵\text{لا} + \text{لا}^{۲}}}$

(۹) $\frac{۸\text{لا} - ۳}{\sqrt{۱۲\text{لا} - ۴\text{لا}^{۲} - ۵}}$ (۱۰) $\frac{۱ - \text{لا}}{\sqrt{۴\text{لا}^{۲} - ۴\text{لا} - ۳}}$

(۱۱) $\frac{۱}{\sqrt{۴ + ۳\text{لا} - ۲\text{لا}^{۲}}}$ (۱۲) $\frac{۶\text{لا} + ۱}{\sqrt{۳\text{لا} + ۹\text{لا}^{۲}}}$

(۱۳) $(۶ + \text{لا} - \text{لا}^{۲})^{۵}(۱ - ۲\text{لا})$ (۱۴) $(۱ - \text{لا})^{۲}(\text{لا}^{۳} - ۳\text{لا}^{۲} + ۳\text{لا} - ۱۰)^{۲}$

(۱۵) $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}$ (۱۶) $\frac{\text{مس}^{-۱}\text{لا}}{۱ + \text{لا}^{۲}}$

(۱۷) $\text{جب}^{۲}\,۳\text{طہ}$ (۱۸) $\text{جب}^{۶}\,\text{طہ}$

(۱۹) $\text{جم}^{۴}\,\text{طہ}$ (۲۰) $\text{جب}^{۷}\,\text{طہ}$

(۲۱) $\text{جم}^{۵}\,\text{طہ}$

۴ء۵۔ تکمل بالحصص :—

اکثر تفاعل جن کو تکمل کرنے کی ہمیں ضرورت ہوتی ہے بظاہر نہ تو معیاری شکل کے ہوتے ہیں نہ انہیں کسی آسان استحالہ (تبدیلی) کی مدد سے معیاری شکل میں لایا جا سکتا ہے۔ ایسے تفاعل اگر دو سادہ قسم کے تفاعلوں کا حاصل ضرب ہوں تو اِن کو ذیل کے قاعدہ کی مدد سے معیاری

شکل میں لا کر تکمل کیا جا سکتا ہے ۔

فرض کرو کہ ی اور و متغیر لا کے دو تفاعل ہیں، تو دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرلا}}(\text{ی و}) = \text{ی}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

اس مساوات کے دونوں طرف تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ی و} = \int \text{ی}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} + \int \text{و}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا}$$

اس لیے

$$\int \text{ی}\,\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} = \text{ی و} - \int \text{و}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}\,\text{فرلا} \;\ldots\ldots (\text{۱})$$

اب فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{ف}_{\text{۱}}(\text{لا})$، $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{ف}_{\text{۲}}(\text{لا})$

تو $\text{و} = \int \text{ف}_{\text{۲}}(\text{لا})\,\text{فرلا}$، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \text{ف}'_{\text{۱}}(\text{لا})$ ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int \text{ف}_{\text{۱}}(\text{لا})\,\text{ف}_{\text{۲}}(\text{لا})\,\text{فرلا} = \text{ف}_{\text{۱}}(\text{لا})\left\{\int \text{ف}_{\text{۲}}(\text{لا})\,\text{فرلا}\right\}$$

$$- \int \text{ف}'_{\text{۱}}(\text{لا})\left\{\int \text{ف}_{\text{۲}}(\text{لا})\,\text{فرلا}\right\}\text{فرلا} \;..\; (\text{۲})$$

اکثر دو تفاعلوں کے حاصل ضرب میں ایک تفاعل ایسا ہوتا ہے کہ اس کا تکملہ معیاری شکلوں سے ہمیں معلوم ہے ۔ نیز ایک تفاعل کا تفرقی سر اور دوسرے تفاعل کا تکملہ ضرب کھا کر اکثر معیاری شکل میں آجاتے ہیں ۔ اس طرح ہمیں دونوں کے حاصل ضرب کا تکملہ آسانی سے مل جاتا ہے ۔ اس عمل کو "تکمل بالحصص" کہتے ہیں ۔

اس عمل میں دو امور قابل غور ہیں ۔ دو تفاعل $\text{ف}_{\text{۱}}(\text{لا})$ اور $\text{ف}_{\text{۲}}(\text{لا})$ ہوئے ہوئے ہوں تو پہلے یہ دیکھنا چاہیے کہ دونوں میں سے کس تفاعل کو

ہم معیاری شکلوں سے یا کسی اور طرح بآسانی معلوم کر سکتے ہیں۔ دوسرے یہ کہ بائیں طرف کا تکملہ یعنی ∫ف$'_{۲}$ (لا) {∫ف$_{۱}$ (لا) فرلا} فرلا ابتدائی تکملہ ∫ف$_{۱}$ (لا) ف$_{۲}$ (لا) فرلا کی بہ نسبت آسان تر ہے یا نہیں۔ اگر ایسا نہ ہو تو ضابطہ (۱) میں ی = ف$_{۲}$ (لا)، $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = ف$_{۱}$ (لا)، و = ∫ف$_{۱}$ (لا) فرلا
$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ = ف$'_{۲}$ (لا) رکھنا چاہیئے جس سے حاصل ہوگا

∫ف$_{۱}$ (لا) ف$_{۲}$ (لا) فرلا = ف$_{۲}$ (لا) {∫ف$_{۱}$ (لا) فرلا}

− ∫ف$'_{۲}$ (لا) {∫ف$_{۱}$ (لا) فرلا} فرلا ......(۳)

اس کا کوئی عام قاعدہ نہیں بتلایا جا سکتا کہ ف$_{۱}$ (لا) اور ف$_{۲}$ (لا) میں سے کس تفاعل کو ی کے مساوی اور کس کو $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ کے مساوی رکھا جائے۔ دی ہوئی مثالوں میں آزمائش سے اس کا تصفیہ ہو سکتا ہے۔

اس کے علاوہ بعض اوقات محض ایک مرتبہ تکمل بالحصص کرنے سے جواب نہیں ملتا بلکہ آخری تکملہ ∫ف$'_{۲}$ (لا) {∫ف$_{۱}$ (لا) فرلا} فرلا بھی ممکن ہے معیاری شکل کا نہ ہو۔ اس صورت میں آخری تکملہ کو ابتدائی تکملہ کی طرح دو تفاعلوں کا حاصل ضرب مان کر پھر دوبارہ تکمل بالحصص کرنا چاہیے اور اگر اس پر بھی عمل تکمل ختم نہ ہو تو تیسری یا چوتھی مرتبہ وغیرہ جہاں تک ضرورت ہو تکمل بالحصص کرتے جانا چاہیئے یہاں تک کہ آخری تفاعل جس کو تکمل کرنا ہے معیاری شکل میں آجائے۔

ان نکات کو ہم چند مثالوں کے ذریعہ واضح کرینگے۔

مثال (۱۰)۔ لا جب لا کو تکمل کرو۔

محض لا کو بھی ہم تکمل کر سکتے ہیں اور اگر صرف جب لا تنہا ہو تو اس کو بھی تکمل کر سکتے ہیں لیکن اب تک کوئی قاعدہ ایسا نہیں معلوم ہے جس کی بناء پر لا جب لا کو تکمل کیا جا سکے۔ اس لیے اس کو تکمل بالحصص کرنے کی کوشش کرینگے۔ اب پہلا سوال یہ ہے کہ لا اور جب لا میں سے کس کو ی اور کس کو $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ کے مساوی رکھا جائے؟ دونوں بآسانی

تکمل ہو سکتے ہیں اس لیے کسی کو بھی $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ رکھا جاسکتا ہے لیکن اگر بالفرض لا = $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ رکھیں تو

و = ∫ لا فرلا = $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ ہوتا ہے اور اس لیے ∫ و $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ فرلا = ∫ $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ جم لا فرلا

جو ظاہر ہے کہ ابتدائی تکملہ ∫ لا جب لا فرلا کی بہ نسبت زیادہ پیچیدہ ہے۔
اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ی = لا اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = جب لا رکھنا ضروری ہے

اب و = ∫ جب لا فرلا = -جم لا اور $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ = ۱

پس

∫ لا جب لا فرلا = - لا جم لا - ∫ ۱ (-جم لا) فرلا = - لا جم لا + ∫ جم لا فرلا

= - لا جم لا + جب لا + ک

مثال (۲) لا^{۲} و$^{\text{لا}}$ کو تکمل کرو:—

ایسے تفاعلوں کو تکمل کرنے کے لیے جن میں ف (لا) = لا$^{\text{ن}}$ جہاں ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے اور ف$_{۲}$ (لا) = جب لا یا جم لا یا و$^{\text{لا}}$ ہو ہمیشہ ی = لا$^{\text{ن}}$ اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = جب لا یا جم لا یا و$^{\text{لا}}$ لینا چاہیئے تاکہ آخری تکملے پہلے کی بہ نسبت زیادہ آسان ہوتے چلے جائیں۔ پس موجودہ مثال میں

ی = لا^{۲}، $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = و$^{\text{لا}}$، و = و$^{\text{لا}}$، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ = ۲ لا

اس لیے ∫ لا^{۲} و$^{\text{لا}}$ فرلا = لا^{۲} و$^{\text{لا}}$ - ۲ ∫ لا و$^{\text{لا}}$ فرلا

اسی طرح ∫ لا و$^{\text{لا}}$ فرلا = لا و$^{\text{لا}}$ - ∫ و$^{\text{لا}}$ فرلا = لا و$^{\text{لا}}$ - و$^{\text{لا}}$

پس ∫ لا^{۲} و$^{\text{لا}}$ فرلا = لا^{۲} و$^{\text{لا}}$ - ۲ لا و$^{\text{لا}}$ + ۲ و$^{\text{لا}}$ + ک

مثال (۳) و$^{\text{لا}}$ جب لا کو تکمل کرو:—

اس مثال میں و$^{\text{لا}}$ اور جب لا میں سے کسی تفاعل کو ی اور دوسرے کو $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ لے سکتے ہیں۔ پس

ی = و$^{\text{لا}}$، $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ = جب لا، و = - جم لا، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ = و$^{\text{لا}}$

اس لیے

$$\int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا فرلا} = -\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم لا} + \int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم لا فرلا}$$

نیز اسی طرح و^لا جم لا کو تکمل بالحصص کرنے سے جبکہ ی = و^لا اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا}$ رکھیں، حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم لا فرلا} = \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا} - \int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا فرلا}$$

پس

$$\int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا فرلا} = -\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم لا} + \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا} - \int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا فرلا}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ جب ہم و^لا جب لا کو تکمل بالحصص کرتے ہیں تو بائیں طرف بھی پھر وہی ابتدائی تکملہ حاصل ہوتا ہے۔ اس کو سیدھے طرف لے جانے سے فوراً قیمت مل جاتی ہے

$$۲\int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا فرلا} = \text{و}^{\text{لا}}\,(\text{جب لا} - \text{جم لا})$$

یعنے

$$\int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا فرلا} = \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۲}\,(\text{جب لا} - \text{جم لا}) + \text{ک}$$

اگر اس قیمت کو ہم و^لا جم لا کے تکملہ میں رکھیں تو حاصل ہوتا ہے

$$\int \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم لا فرلا} = \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا} - \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۲}\,(\text{جب لا} - \text{جم لا}) + \text{کَ}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۲}\,(\text{جم لا} + \text{جب لا}) + \text{کَ}$$

مثال (۴) لوک لا کو تکمل کرو:-

اس طرح کے تفاعلوں کو تکمل بالحصص کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ لوک لا دو تفاعلوں کا حاصلِ ضرب نہیں ہے لیکن ہم فرض کر سکتے ہیں کہ دوسرا تفاعل ۱ ہے یعنے دیا ہوا تفاعل دراصل ۱ × لوک لا ہے جس کے لیے ہم رکھتے ہیں

$$\text{ی} = \text{لوک لا}،\quad \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = ۱،\quad \text{و} = \text{لا}،\quad \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{\text{لا}}$$

پس $\int \text{لوک لا فرلا} = \int 1 \times \text{لوک لا فرلا} = \text{لا لوک لا} - \int \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}}\,\text{فرلا}$

$= \text{لا لوک لا} - \int \text{فرلا} = \text{لا لوک لا} - \text{لا} + \text{ک}$

مثال (۵) $\text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}$ کو تکمل کرو۔

$$\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا} = \int \text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{جم لا فرلا}$$

$$= \frac{1}{3}\text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{2}{3}\int \text{جم لا جب لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{1}{3}\text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{2}{3}\int \text{جم لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,(1 - \text{جم}^{2}\text{لا})\,\text{فرلا}$$

پس $\left(1 + \frac{2}{3}\right)\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{3}\text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{2}{3}\int \text{جم لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا}$

یعنے $\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{5}\text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{2}{5}\int \text{جم لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا}$

$$= \frac{1}{5}\text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{2}{3\times 5}\text{جب}^{3}\text{لا}$$

$$= \frac{1}{5}\text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{2}{3\times 5}(1 - \text{جم}^{2}\text{لا})\,\text{جب لا}$$

$$= \frac{1}{5}\text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} - \frac{2}{3\times 5}\text{جم}^{2}\text{لا}\,\text{جب لا} + \frac{2}{3\times 5}\text{جب لا}$$

مثال (۶) $\text{جم}^{5}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}$ کو تکمل کرو۔

$$\int \text{جم}^{5}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا} = \int \text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{جم لا فرلا}$$

$$= \text{جم}^{4}\text{لا}\,\frac{\text{جب}^{5}\text{لا}}{5} + \frac{4}{5}\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب لا}\,\text{جب}^{5}\text{لا}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{1}{5}\text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{جب}^{5}\text{لا} + \frac{4}{5}\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,(1 - \text{جم}^{2}\text{لا})\,\text{فرلا}$$

پس $\left(1 + \frac{4}{5}\right)\int \text{جم}^{5}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{5}\text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{جب}^{5}\text{لا} + \frac{4}{5}\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا}$

یعنے $\int \text{جم}^{5}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{9}\text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{جب}^{5}\text{لا} + \frac{4}{9}\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا} \quad (1)$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ جم^{5} لا جب^{4} لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے جم^{3} لا جب^{4} لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنی جم لا کی قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے۔

لیکن $\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا} = \int \text{جب}^{3}\text{لا}\,\text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب لا}\,\text{فرلا}$

$$= -\frac{1}{4}\text{جب}^{3}\text{لا}\,\text{جم}^{4}\text{لا} + \frac{3}{4}\int \text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{جم لا}\,\text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا}$$

$$= -\frac{1}{4}\text{جب}^{3}\text{لا}\,\text{جم}^{4}\text{لا} + \frac{3}{4}\int \text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{جم}^{3}\text{لا}\,(1-\text{جب}^{2}\text{لا})\,\text{فرلا}$$

پس $\left(1+\frac{3}{4}\right)\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا} = -\frac{1}{4}\text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{3}{4}\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا}$

یعنی
$$\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا} = -\frac{1}{7}\text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{3}{7}\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا} \qquad (2)$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ جم^{3} لا جب^{4} لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے جم^{3} لا جب^{2} لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنی جب لا کی قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے۔ (۱) میں (۲) سے قیمت درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$\int \text{جم}^{5}\text{لا}\,\text{جب}^{4}\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{1}{9}\text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{جب}^{5}\text{لا} - \frac{4}{7\times 9}\text{جم}^{4}\text{لا}\,\text{جب}^{3}\text{لا} + \frac{3\times 4}{7\times 9}\int \text{جم}^{3}\text{لا}\,\text{جب}^{2}\text{لا}\,\text{فرلا} \qquad (3)$$

اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ جم^{5} لا جب^{4} لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے جم^{3} لا جب^{2} لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنے جم لا اور جب لا دونوں کی قوتیں بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہیں۔

لیکن مثال (۵) کی بناء پر چونکہ ہمیں $\int$ جم^{3} لا جب^{2} لا فرلا کی قیمت معلوم ہے اس لیے جم^{5} لا جب^{4} لا کا تکملہ بالکلیہ معلوم ہو جاتا ہے۔

مثال (۷) جم^{ن} لا جب^{م} لا کو تکمل کرو جہاں ن اور م کوئی مثبت صحیح عدد ہیں۔

اس تفاعل کو بھی ہم ایک تحویلی ضابطہ کی مدد سے تکمل کر سکتے ہیں یعنے ہماری کوشش ہوتی ہے کہ م اور ن کو بتدریج بقدر ۲ کے کم کرتے جائیں۔ چونکہ

$$\text{جم}^{ن}\,\text{لا جب}^{م}\,\text{لا} = \text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا}\ \left(\text{جب}^{م}\,\text{لا جم لا}\right)$$

اس لیے تکمل بالحصص کے ضابطہ کو استعمال کرنے کی غرض سے ہم رکھتے ہیں

$$\text{ی} = \text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا}\ ،\ \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{جب}^{م}\,\text{لا جم لا}\ ،\ \text{و} = \frac{\text{جب}^{م+۱}\,\text{لا}}{\text{م}+۱}$$

پس

$$\text{ع}_{ن،م} = \int \text{جم}^{ن}\,\text{لا جب}^{م}\,\text{لا فرلا}$$

$$= \int \text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا}\ (\text{جب}^{م}\,\text{لا جم لا})\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا جب}^{م+۱}\,\text{لا}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\int \text{جم}^{ن-۲}\,\text{لا جب}^{م+۱}\,\text{لا جب لا فرلا}$$

$$= \frac{\text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا جب}^{م+۱}\,\text{لا}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\int \text{جم}^{ن-۲}\,\text{لا جب}^{م}\,\text{لا}\ (۱-\text{جم}^{۲}\,\text{لا})\ \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا جب}^{م+۱}\,\text{لا}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\ \text{ع}_{ن-۲،م} - \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\ \text{ع}_{ن،م}$$

یعنی

$$\text{ع}_{ن،م}\left\{۱+\frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\right\} = \frac{\text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا جب}^{م+۱}\,\text{لا}}{\text{م}+۱} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{م}+۱}\ \text{ع}_{ن-۲،م}$$

پس

$$\text{ع}_{ن،م} = \frac{۱}{\text{ن}+\text{م}}\ \text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا جب}^{م+۱}\,\text{لا} + \frac{\text{ن}-۱}{\text{ن}+\text{م}}\ \text{ع}_{ن-۲،م} \quad ......(۱)$$

تحویلی ضابطہ (۱) میں ہم دیکھتے ہیں کہ جم لا کی قوت ن بقدر ۲ کے کم ہوگئی ہے لیکن جب لا کی قوت م وہی ہے جو پہلے تھی - لیکن ہم اس کو بھی کم کر سکتے ہیں :

$$\text{ع}_{ن-۲،م} = \int \text{جم}^{ن-۲}\,\text{لا جب}^{م}\,\text{لا فرلا} = \int (\text{جم}^{ن-۲}\,\text{لا جب لا})\ \text{جب}^{م-۱}\,\text{لا فرلا}$$

$$= -\frac{\text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا جب}^{م-۱}\,\text{لا}}{\text{ن}-۱} + \frac{\text{م}-۱}{\text{ن}-۱}\int \text{جم}^{ن-۱}\,\text{لا جب}^{م-۲}\,\text{لا فرلا}$$

$$= -\frac{1}{\text{ن}-1}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-1}\text{لا} + \frac{\text{م}-1}{\text{ن}-1}\int \text{جم}^{\text{ن}-2}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-2}\text{لا}\,(1-\text{جب}^{2}\text{لا})\,\text{قرلا}$$

$$= -\frac{1}{\text{ن}-1}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-1}\text{لا} + \frac{\text{م}-1}{\text{ن}-1}\,\text{ع}_{\text{ن}-2،\,\text{م}-2} - \frac{\text{م}-1}{\text{ن}-1}\,\text{ع}_{\text{ن}-2،\,\text{م}}$$

پس

$$\text{ع}_{\text{ن}-2،\,\text{م}} = -\frac{\text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-1}\text{لا}}{\text{ن}+\text{م}-2} + \frac{\text{م}-1}{\text{ن}+\text{م}-2}\,\text{ع}_{\text{ن}-2،\,\text{م}-2} \quad \ldots (2)$$

ضابطہ (۲) کو ضابطہ (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}،\,\text{م}} = \frac{1}{\text{ن}+\text{م}}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}+1}\text{لا} - \frac{1}{\text{ن}+\text{م}}\,\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}+\text{م}-2}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-1}\text{لا}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-1)(\text{م}-1)}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-2)}\,\text{ع}_{\text{ن}-2،\,\text{م}-2} \quad (3)$$

چونکہ ضابطہ (۳) ن اور م کی ہر قیمت کے لیے صحیح ہے اس لیے ن کی بجائے ن ۔ ۲ اور م کی بجائے م ۔ ۲ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ع}_{\text{ن}-2،\,\text{م}-2} = \frac{1}{\text{ن}+\text{م}-4}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-1}\text{لا} - \frac{1}{\text{ن}+\text{م}-4}\,\frac{\text{ن}-3}{\text{ن}+\text{م}-6}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-3}\text{لا}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-3)(\text{م}-3)}{(\text{ن}+\text{م}-4)(\text{ن}+\text{م}-6)}\,\text{ع}_{\text{ن}-4،\,\text{م}-4}$$

پس

$$\text{ع}_{\text{ن}،\,\text{م}} = \frac{1}{\text{ن}+\text{م}}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}+1}\text{لا} - \frac{1}{\text{ن}+\text{م}}\,\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}+\text{م}-2}\,\text{جم}^{\text{ن}-1}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-1}\text{لا}$$

$$+ \frac{1}{\text{ن}+\text{م}}\,\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}+\text{م}-2}\,\frac{\text{م}-1}{\text{ن}+\text{م}-4}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-1}\text{لا}$$

$$- \frac{1}{\text{ن}+\text{م}}\,\frac{\text{ن}-1}{\text{ن}+\text{م}-2}\,\frac{\text{م}-1}{\text{ن}+\text{م}-4}\,\frac{\text{ن}-3}{\text{ن}+\text{م}-6}\,\text{جم}^{\text{ن}-3}\text{لا}\,\text{جب}^{\text{م}-3}\text{لا}$$

$$+ \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)(\text{م}-1)(\text{م}-3)}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-2)(\text{ن}+\text{م}-4)(\text{ن}+\text{م}-6)}\,\text{ع}_{\text{ن}-4،\,\text{م}-4}$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ ہر تکمل بالحصص کے بعد ن اور م دونوں بقدر ۲ کے کم ہوجاتے ہیں ۔ اب چار صورتیں پیش آتی ہیں :-

صورت اول ۔ ن طاق، م طاق، ن + م جفت

اس صورت میں آخری تکملہ $ع_{1,1} = \int \text{جم لا جب لا فر لا} = \frac{\text{جب}^2 \text{لا}}{2}$ اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{آخری رقم} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)(\text{ن}-5)\cdots 2\times 4 \times \cdots (\text{م}-1)(\text{م}-3)\cdots 2\times 4 \times \cdots}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-2)(\text{ن}+\text{م}-4)\cdots 2\times 4\times 6 \times \cdots} \text{جب}^2 \text{لا} \quad (4)$$

صورت دوم ۔ ن طاق، م جفت، ن + م طاق

آخری تکملہ $ع_{1,0} = \int \text{جم لا فر لا} = \text{جب لا}$ اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{آخری رقم} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots 2\times 4 \times \cdots (\text{م}-1)(\text{م}-3)\cdots 1\times 3 \times 1}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-2)(\text{ن}+\text{م}-4)\cdots 1\times 3\times 5 \times \cdots} \text{جب لا} \ldots\ldots (5)$$

صورت سوم ۔ ن جفت، م طاق، ن + م طاق

آخری تکملہ $ع_{0,1} = \int \text{جب لا فر لا} = -\text{جم لا}$ اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{آخری رقم} = -\frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots 1\times 3 \times 1 (\text{م}-1)(\text{م}-3)\cdots 2\times 4 \times \cdots}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-2)(\text{ن}+\text{م}-4)\cdots 1\times 3\times 5 \times \cdots} \text{جم لا} \ldots\ldots (6)$$

صورت چہارم ۔ ن جفت، م جفت، ن + م جفت

آخری تکملہ $ع_{0,0} = \int \text{فر لا} = \text{لا}$ اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

$$\text{آخری رقم} = \frac{(\text{ن}-1)(\text{ن}-3)\cdots 1\times 3 \times 1 (\text{م}-1)(\text{م}-3)\cdots 1\times 3 \times 1}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-2)(\text{ن}+\text{م}-4)\cdots 2\times 4\times 6 \times 2} \text{لا} \ldots\ldots (7)$$

ن اور م کی قیمتوں کو کم کرتے وقت یہ خیال رکھنا چاہیے کہ اگر ن کی قیمت م سے پہلے ختم ہوجائے تو پھر ضابطہ (۲) کی مدد سے ن کی آخری قیمت

کو مستقل رکھ کر م کی قیمتوں کو کم کرنا چاہیئے۔ اس کے برخلاف اگر م کی قیمت پہلے ختم ہو جائے تو ضابطہ (۱) کی مدد سے م کی اس آخری قیمت کو مستقل رکھ کر ن کی قیمتوں کو کم کرنا چاہیئے یہاں تک کہ مذکورۂ بالا چار صورتوں میں سے کوئی صورت حاصل ہو جائے۔

اگر صرف ∫ جم^{ن} لا فر لا معلوم کرنا ہو تو اوپر کی مثال میں م = ۰ رکھو اور اگر صرف ∫ جب^{م} لا فر لا معلوم کرنا ہو تو ن = ۰ رکھو اور اس طرح عمل کرو کہ قوتیں بقدر ۲ کے کم ہوتی جائیں۔

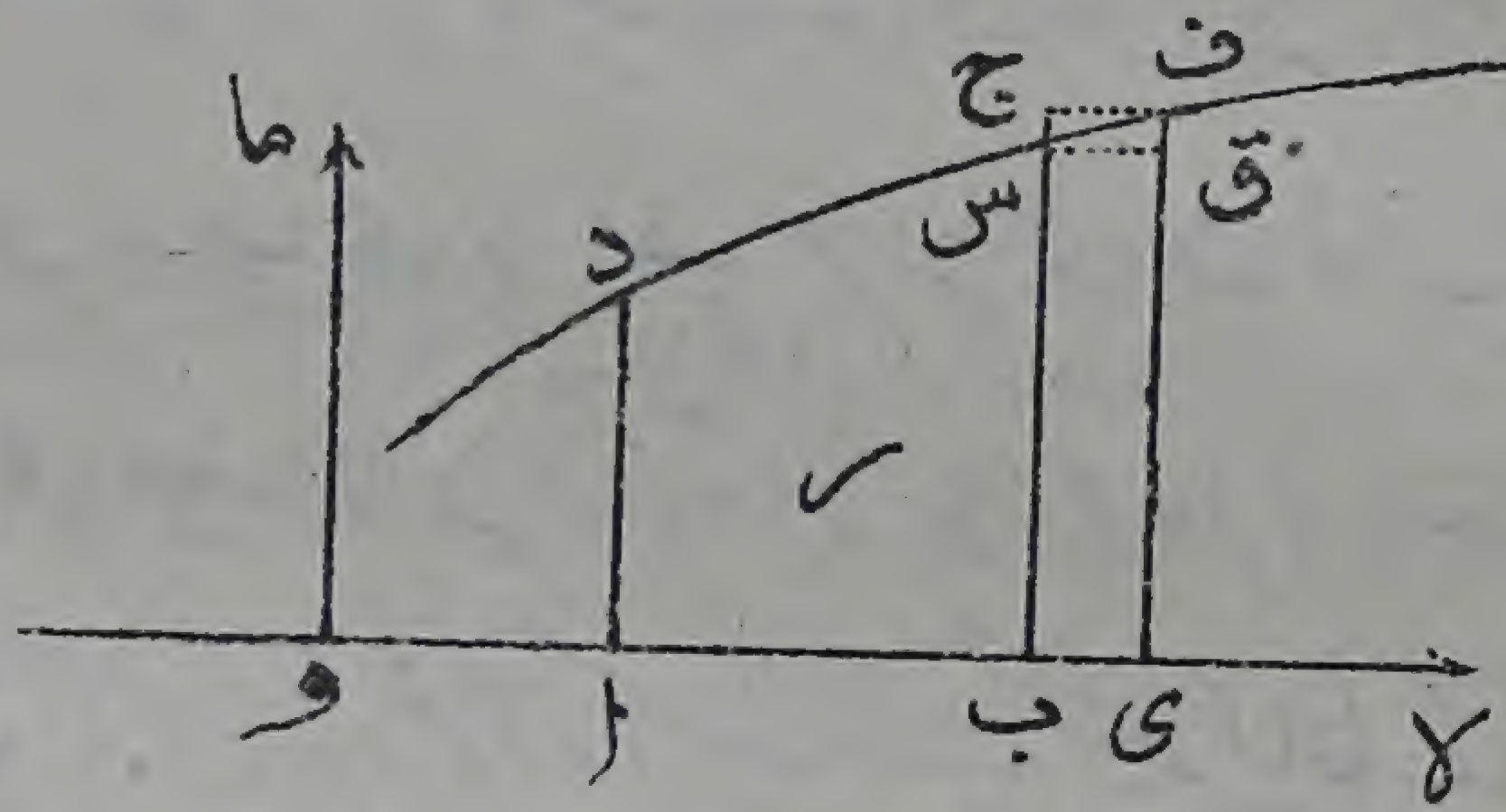
مشقی سوالات ۲۴

ذیل کے تفاعلوں کو تکمل کرو:۔

(۱) ∫ لا جب ۲ لا
(۲) ∫ لا^{۲} جم لا
(۳) ∫ لا^{۳} و^{لا}
(۴) ∫ لا جم^{۳} لا
(۵) ∫ لا (لوک لا)^{۲}
(۶) ∫ و^{لا} جب ۲ لا
(۷) ∫ و^{۲لا} جم لا
(۸) ∫ و$^{-لا}$ جم ۳ لا
(۹) ∫ و^{لا} جب لا جم لا
(۱۰) ∫ مس$^{-۱}$ لا
(۱۱) ∫ لا جب$^{-۱}$ لا
(۱۲) ∫ لا^{۲} مس$^{-۱}$ لا
(۱۳) ∫ جب^{۶} لا
(۱۴) ∫ جب^{۵} لا
(۱۵) ∫ جم^{۴} لا
(۱۶) ∫ جم^{۵} لا
(۱۷) ∫ جب^{۷} لا جم^{۳} لا
(۱۸) ∫ جب^{۷} لا جم^{۲} لا
(۱۹) ∫ جب^{۶} لا جم^{۳} لا
(۲۰) ∫ جب^{۲} لا جم^{۴} لا

۵ء۵ معین تکملہ

۵ء۵۱ :— تکملہ کی ہندسی تعبیر —

فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے تفاعل ما = ف (لا) کی ترسیم د س ف منحنی میں کی گئی ہے اور و ا = اَ و ب = لاَ ب ی = مف لا

فاصلے محور لا پر لیے گئے ہیں اور نقاط ا، ب، ی پر کے معین ا د، ب س، ی ف کھینچے گئے ہیں۔ ف ج محور لا کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ب س ممدودہ کو نقطۂ ج پر قطع کرتا ہے۔ اسی طرح س ق محور لا کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ی ف (ممدودہ بشرطِ ضرورت) کو ق پر قطع کرتا ہے۔ تب

س ق = ج ف = ب ی = مف لا ؛

نقطہ ا کا مقام معین ہے کیونکہ ا پر لا = اَ ہے لیکن ب کو ہم جہاں چاہیں لے سکتے ہیں اور اس کے ساتھ ی کا مقام بھی بدلیگا۔

اب رقبہ ا ب س د پر غور کرو جو تین مستقیم خطوں ا ب، ا د، ب س سے اور ایک منحنی خط د س سے گھرا ہوا ہے۔ اس رقبہ کو اگر ہم ر سے تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ نقطہ ب یعنے لا کو بدلنے سے

یہ رقبہ بھی بدلیگا پس ر متغیر لا کا ایک تفاعل ہوگا۔

ب ی کو ہم نے ایک چھوٹا فاصلہ مف لا لیا ہے اس لیے رقبہ ب ی ف س بھی ایک چھوٹا رقبہ ہوگا جس کو مف ر سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ اب چونکہ

و ب = لا اس لیے ب س = ف (لا)، و ی = لا + مف لا،

ی ف = ف (لا + مف لا)

اب شکل سے ظاہر ہے کہ

مستطیل ب ی ق س < رقبۂ ب ی ف س < مستطیل ب ی ف ج

یعنے

ب س × ب ی < مف ر < ی ف × ب ی

یعنے

ف (لا) مف لا < مف ر < ف (لا + مف لا) مف لا

اس رشتے میں اگر سب رقموں کو مف لا سے تقسیم کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے کہ

ف (لا) < $\frac{\text{مف ر}}{\text{مف لا}}$ < ف (لا + مف لا)   (۱)

رشتۂ (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ رقبہ ر کے بدلنے کی اوسط شرح ب س اور ی ف کے درمیان کسی عدد کے مساوی ہوتی ہے اب مف لا کی چاہے کچھ ہی قیمت لی جائے یہ رشتہ قائم رہتا ہے۔

اگر مف لا کو بہت چھوٹا کرتے جائیں تو ف (لا + مف لا) کی قیمت ف (لا) کی قیمت کے قریب آتی جاتی ہے یعنے اگر نقطہ ی کو نقطہ ب کے بہت قریب لائیں تو ی ف کی قیمت ب س کے قریب آتی ہے لیکن اس صورت میں بھی $\frac{\text{مف ر}}{\text{مف لا}}$ کی قیمت ی ف اور ب س کے درمیان رہتی ہے۔ پس آخر چونکہ ی ف کی انتہا ب س ہے اس لیے $\frac{\text{مف ر}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا بھی ب س ہوگی۔

لہذا

نہا (مف لا ← ۰) مف س / مف لا = ب س = ف (لا)

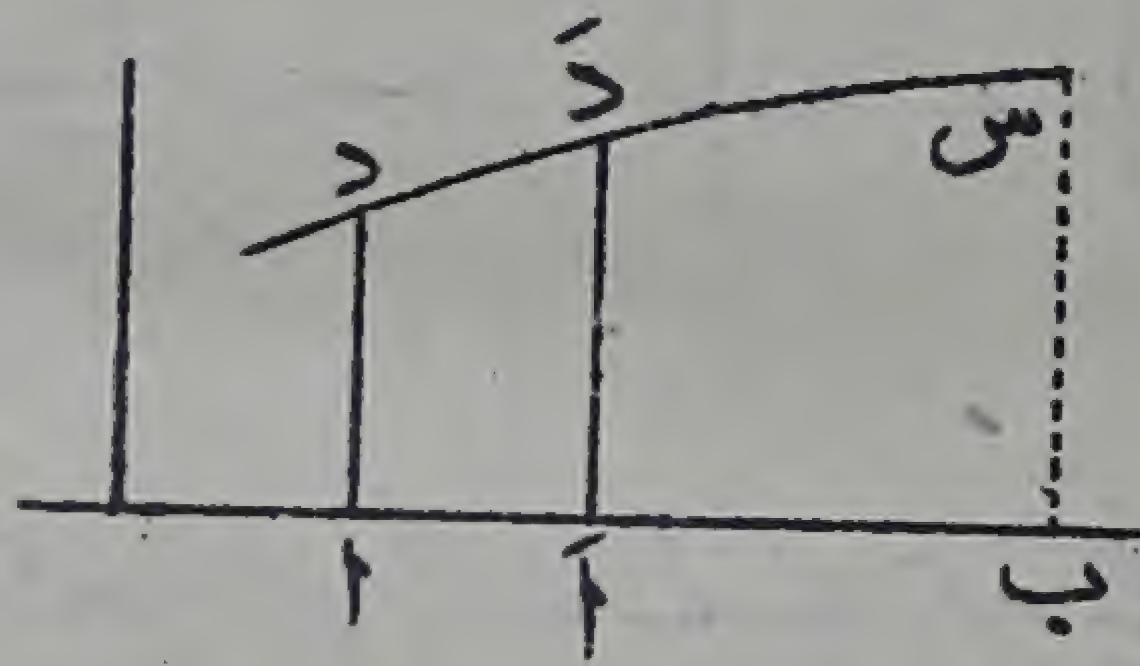
یعنے

فر س / فر لا = ف (لا) .... (۲)

یعنے رقبہ س (ا ب س د) متغیر لا کا وہ تفاعل ہے جس کا تفرقی سر دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کے مساوی ہے۔ اس لیے غیر معین تکملہ کی تعریف کی بناء پر

س = ∫ ف (لا) فرلا + ک .... (۳)

جہاں ک تکمل کا اختیاری مستقل ہے۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل ف (لا) کا غیر معین تکملہ اس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے جو کسی ایک نقطہ ا (لا = اَ) سے کسی متبدل نقطہ ب (لا) تک منحنی اور محور لا کے درمیان محصور ہو۔ نقطہ ا کو بدلنے کا اثر سوائے اس کے کچھ نہیں ہے کہ مستقل ک کی قیمت بدل جائے۔ مثلاً اگر ہم رقبہ کو

نقطہ اَ (لا = اَ) سے ناپیں تو

س = رقبہ اَ ب س دَ = رقبہ ا ب س د - رقبہ ا اَ دَ د

= ∫ ف (لا) فرلا + ک - رقبہ ا اَ دَ د

= ∫ ف (لا) فرلا + کَ

جہاں کَ = ک - رقبہ ا اَ دَ د بھی ایک مستقل ہے کیونکہ ا اَ دَ د مستقل رقبہ ہے۔

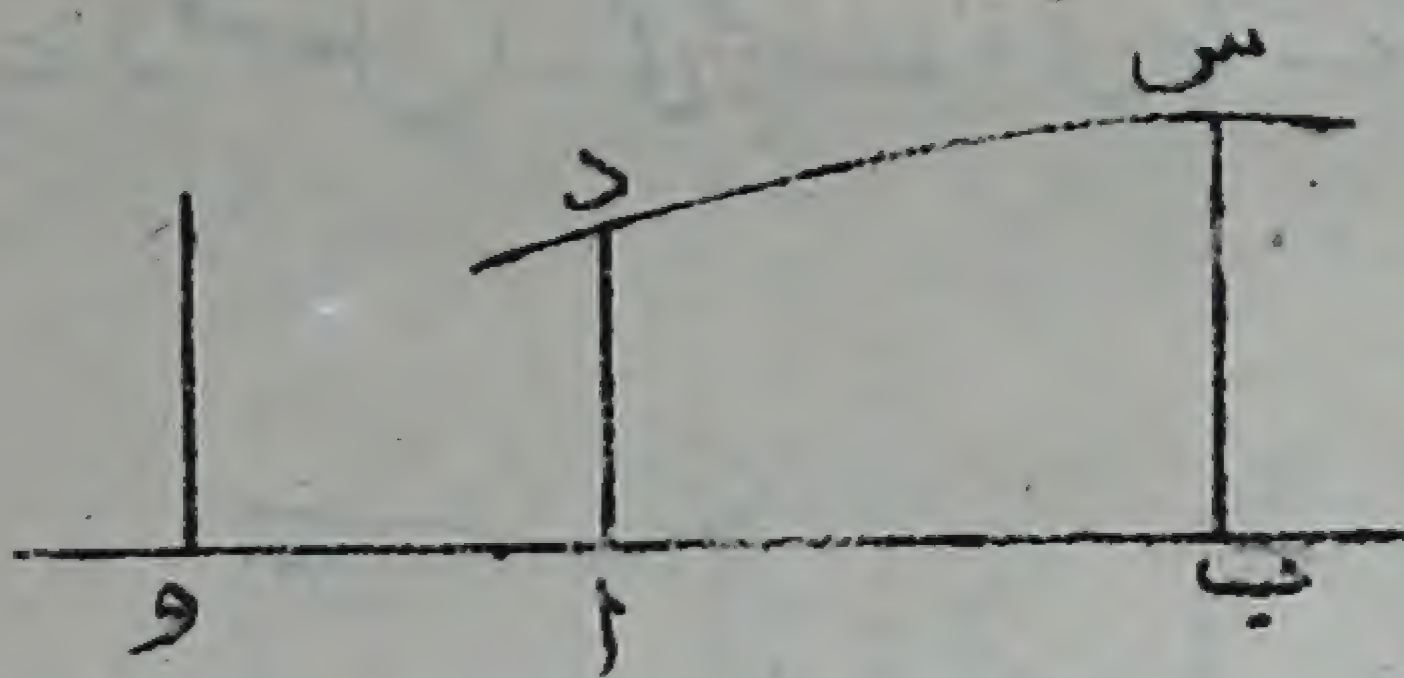
۵۲،۵ - معیّن تکملہ کی تعریف

فرض کرو کہ اختیاری مستقل ک کو شامل کیے بغیر تفاعل ف (لا) کا غیر معین تکملہ فا (لا) ہے
یعنے

فا (لا) = ∫ف (لا) فرلا .... (۱)

اس قیمت کو گزشتہ دفعہ ۵،۵۱ کے رشتہ (۳) میں رکھنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

س = فا (لا) + ک

جہاں ہم رقبہ س کو نقطہ ا (و ا = ا) سے ناپتے ہیں۔

مستقل ک کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر نقطہ ب کو نقطہ ا پر منطبق کیا جائے یعنے اگر لا = ا رکھا جائے تو بجائے رقبہ ا ب س د کے صرف ایک ہی خط ا د حاصل ہوتا ہے یعنے س کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ پس مساوات (۲) میں لا = ا رکھنے پر ملتا ہے کہ

۰ = فا (ا) + ک یعنے ک = - فا (ا)......... (۳)

پس

$$س = فا(لا) - فا(ا) \quad (۴)$$

ضابطہ (۴) سے ہم کو وہ قاعدہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی ثابت نقطہ ا سے ایک متغیر نقطہ ب تک رقبہ کس طرح معلوم کیا جائے۔

اب اگر نقطہ ب کو بھی ہم ثابت کر دیں اور فاصلہ و ب = ب ہو تو رقبہ ا ب س د ایک معین رقبہ ہوتا ہے جس کی قیمت مساوات (۴) میں لا = ب رکھنے سے حاصل ہوتی ہے:-

$$رقبہ\ ا ب س د = فا(ب) - فا(ا) \quad (۵)$$

مساوات (۴) سے تعبیر ہونے والی قیمت کو بالعموم

$$\int_{ا}^{لا} ف(لا)\, فرلا = فا(لا) - فا(ا) \quad (۶)$$

اور مساوات (۵) سے تعبیر ہونے والے جملہ کو

$$\int_{ا}^{ب} ف(لا)\, فرلا = فا(ب) - فا(ا) \quad (۷)$$

لکھتے ہیں۔ جملہ (۷) میں چونکہ ا اور ب دونوں نقطے معین ہیں اس لیے $\int_{ا}^{ب} ف(لا)\, فرلا$ کو "ف (لا) کا معین تکملہ" کہتے ہیں جو نقطہ لا = ا سے نقطہ لا = ب تک لیا جاتا ہے۔ ا کو تکمل کی "سفلی حد" اور ب کو تکمل کی "علوی حد" کہتے ہیں اگر ب > ا یعنے اگر نقطہ ب نقطہ ا کی سیدھی جانب واقع ہو۔

جملہ (۷) سے معین تکملہ کے معلوم کرنے کا قاعدہ یہ حاصل ہوتا ہے کہ ا سے ب تک ف (لا) کا معین تکملہ = غیر معین تکملہ کی قیمت نقطہ لا = ب پر - غیر معین تکملہ کی قیمت نقطہ لا = ا پر۔

اس عمل کو یوں بھی لکھتے ہیں کہ اگر $\int ف(لا)\, فرلا = فا(لا)$، تو

$$\int_{ا}^{ب} ف(لا)\, فرلا = \Big[فا(لا)\Big]_{ا}^{ب} = فا(ب) - فا(ا) \quad (۸)$$

۵،۵۳ - ذیل کی مثالوں سے اس عمل کی بخوبی توضیح ہو جائیگی:-

مثال (۱) $\int_{۳}^{۵} \text{لا}^{۲}\, \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو:-

ہمیں معلوم ہے کہ $\int \text{لا}^{۲}\, \text{فرلا} = \frac{۱}{۳}\,\text{لا}^{۳}$ پس

$$\int_{۳}^{۵} \text{لا}^{۲}\, \text{فرلا} = \left[\frac{۱}{۳}\,\text{لا}^{۳}\right]_{۳}^{۵} = \frac{۱}{۳}\left\{۵^{۳} - ۳^{۳}\right\} = \frac{۱}{۳}\,(۱۲۵ - ۲۷)$$

$$= \frac{۹۸}{۳} = ۳۲\frac{۲}{۳}$$

مثال (۲) $\int_{-۴}^{-۳} \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}}\, \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو:-

چونکہ

$$\int \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}}\, \text{فرلا} = \int \text{لا}^{-\frac{۱}{۳}}\, \text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{-\frac{۱}{۳}+۱}}{-\frac{۱}{۳}+۱} = \frac{۳}{۲}\,\text{لا}^{\frac{۲}{۳}}$$

پس

$$\int_{-۴}^{-۳} \frac{۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۳}}}\, \text{فرلا} = \left[\frac{۳}{۲}\,\text{لا}^{\frac{۲}{۳}}\right]_{-۴}^{-۳} = \frac{۳}{۲}\left\{(-۴)^{\frac{۲}{۳}} - (-۳)^{\frac{۲}{۳}}\right\}$$

$$= \frac{۳}{۲}\left[\left\{(-۴)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۳}} - \left\{(-۳)^{۲}\right\}^{\frac{۱}{۳}}\right] = \frac{۳}{۲}\left(۱۶^{\frac{۱}{۳}} - ۹^{\frac{۱}{۳}}\right)$$

مثال (۳) $\int_{-۱}^{+۱} \text{لا}^{۳}\, \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو:-

چونکہ $\int \text{لا}^{۳}\, \text{فرلا} = \frac{۱}{۴}\,\text{لا}^{۴}$

پس

$$\int_{-۱}^{+۱} \text{لا}^{۳}\, \text{فرلا} = \left[\frac{۱}{۴}\,\text{لا}^{۴}\right]_{-۱}^{+۱} = \frac{۱}{۴}\left\{(۱)^{۴} - (-۱)^{۴}\right\}$$

$$= \frac{۱}{۴}\left\{۱ - ۱\right\} = ۰$$

مثال (۴) $\int_{۰}^{\pi} \text{جم لا}\, \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو:-

چونکہ $\int$ جم لا فرلا = جب لا

پس $\int_{0}^{\pi}$ جم لا فرلا = $\Big[$جب لا$\Big]_{0}^{\pi}$

= جب π - جب ۰

= ۰

مثال (۵) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$ جب لا فرلا کی قیمت معلوم کرو:-

چونکہ $\int$ جب لا فرلا = -جم لا

پس $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$ جب لا فرلا = $\Big[$-جم لا$\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}$

= -{جم $\frac{\pi}{2}$ - جم $(-\frac{\pi}{2})$}

= -{۰ - ۰}

= ۰

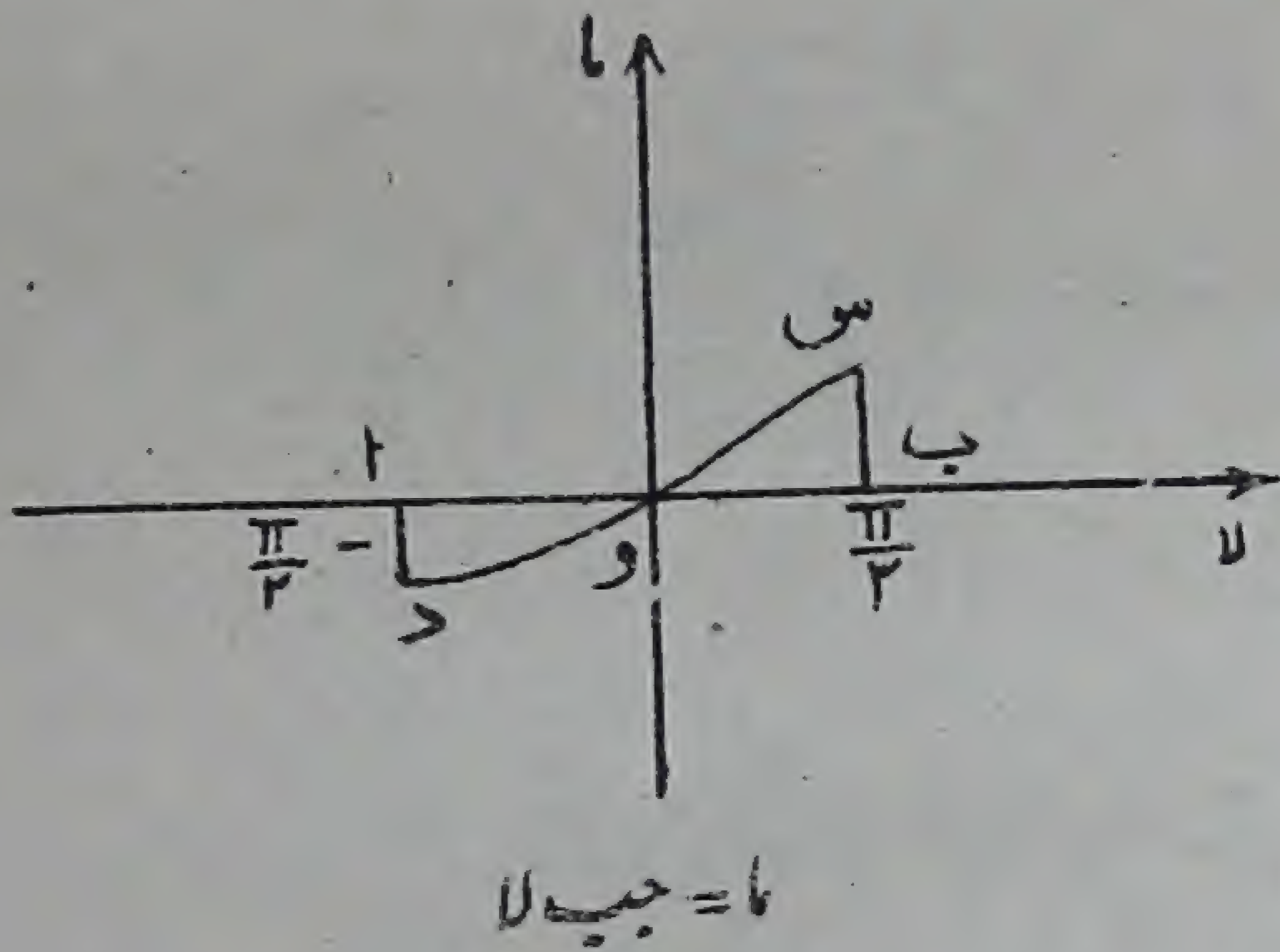
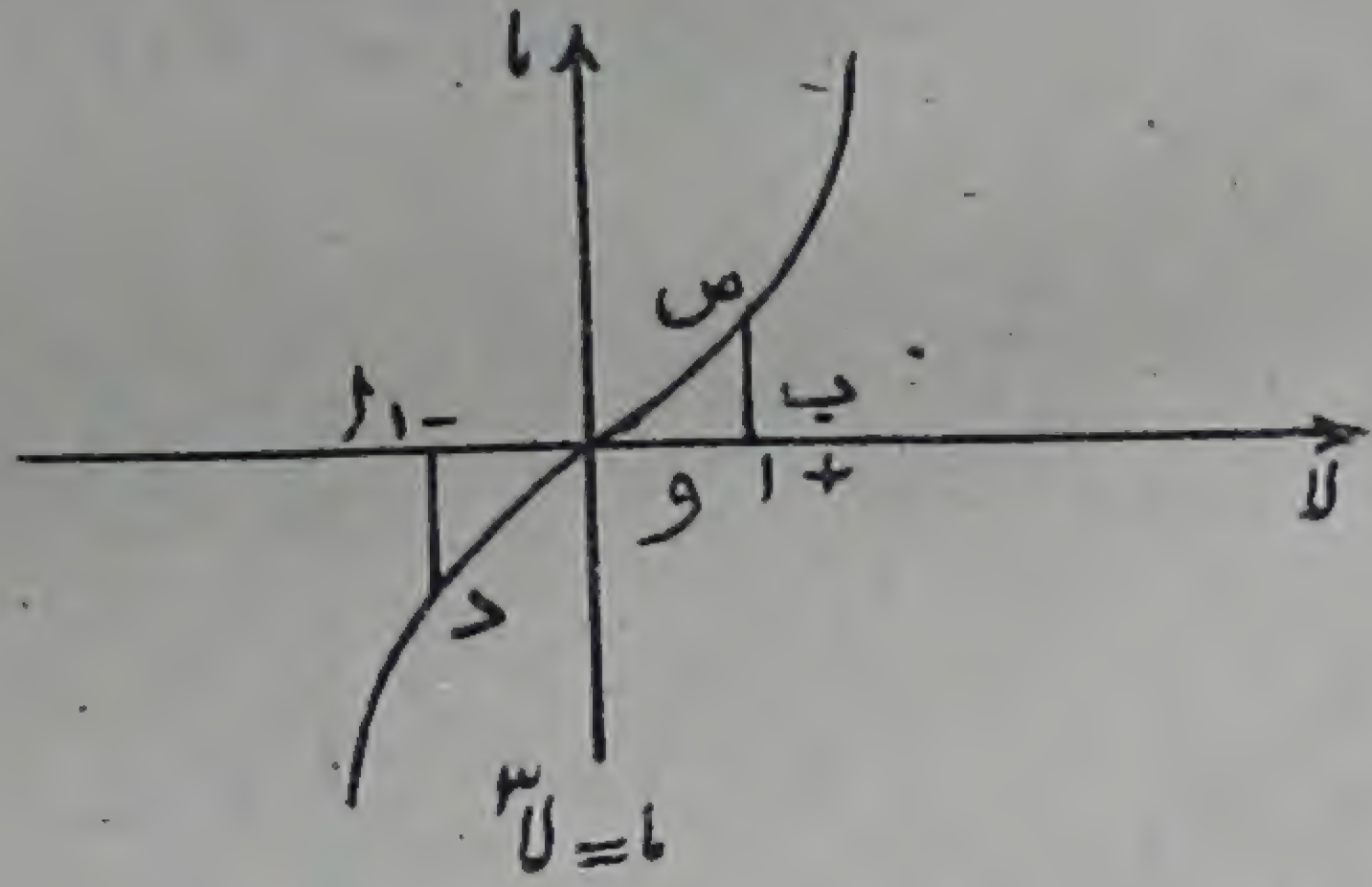
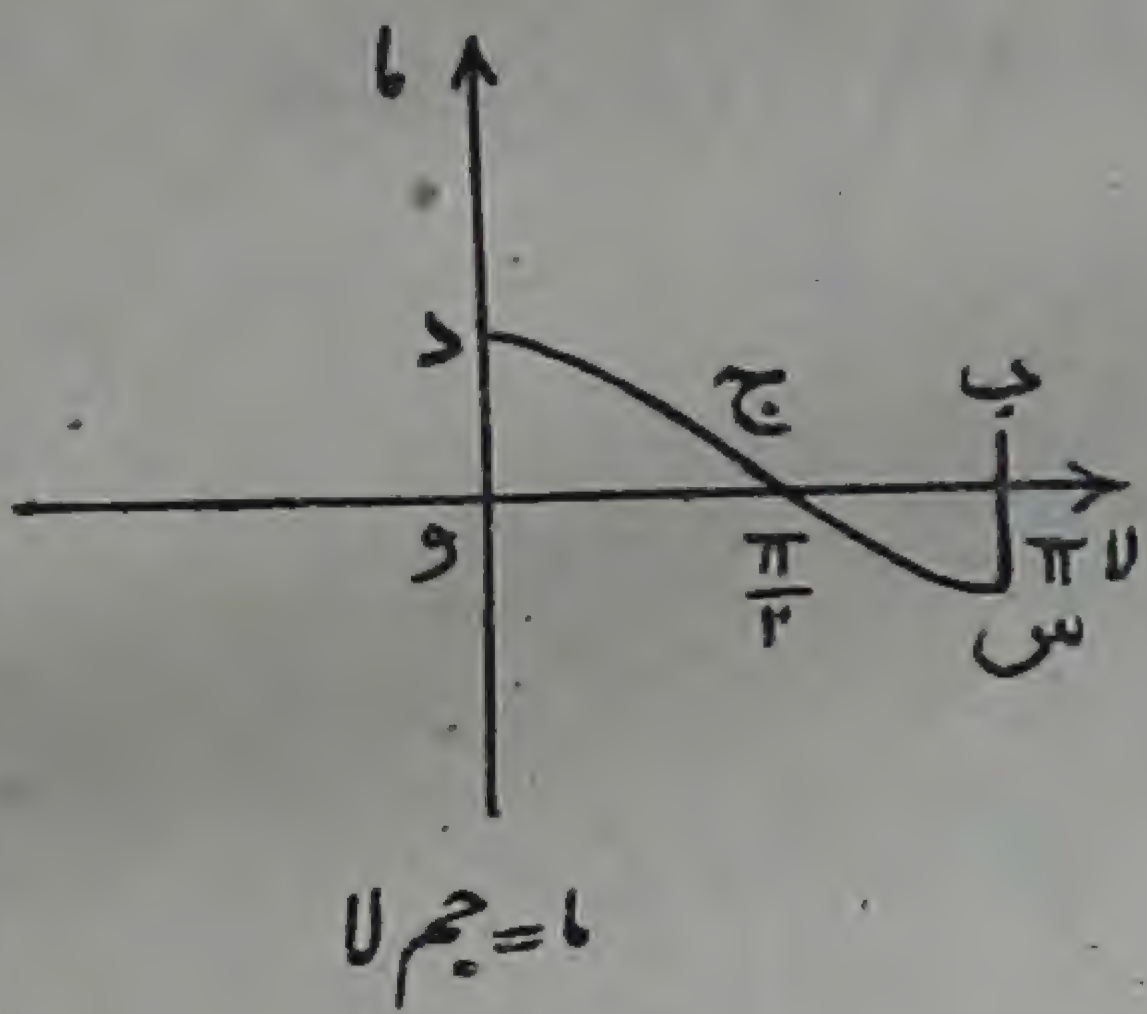
امثلہ ۳ تا ۵ میں ہم دیکھتے ہیں کہ معین تکملہ کی قیمت صفر ہے لیکن تعریف کے بموجب معین تکملہ ایک رقبہ ہوتا ہے اور طالب علم کو یہاں حیرت ہوگی کہ ایک رقبہ کس طرح صفر ہوسکتا ہے جب تک کہ کوئی ایک ضلع صفر نہ ہو۔ اس امر کی توضیح کے لیے ہم بتانا چاہتے ہیں کہ کسی رقبہ کی بھی ایک علامت اسی طرح ہوتی ہے جس طرح ایک خط کی علامت مثبت یا منفی ہوسکتی ہے۔ جو رقبے محور لا کے نیچے واقع ہونگے اُن کی علامت منفی ہوگی اور جو رقبے محور لا کے اوپر واقع ہونگے اُن کی علامت مثبت ہوگی کیونکہ پہلی صورت میں تفاعل کی قیمت یعنے معین ما کی قیمت منفی ہوتی ہے اور دوسری صورت میں تفاعل کی قیمت مثبت ہوتی ہے اور

رقبہ تفاعل کی اس قیمت یعنے معیّن ما کو ایک مثبت فاصلہ یعنے لا = ا سے لے کر لا = ب تک فاصلہ سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔

وضاحت کی خاطر فرض کرو کہ امثلہ ۳ تا ۵ کے معین تکملوں سے تعبیر ہونے والے رقبوں کو شکل میں تعبیر کرتے ہیں۔

ما = لا^{۳}

ما = جم لا

ما = جب لا

اِن تینوں شکلوں میں ہم دیکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر رقبہ ا ج س د دو مساوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک حصہ محور لا سے اوپر اور دوسرا محور لا کے نیچے واقع ہوتا ہے یعنے ایک حصّہ مثبت اور دوسرا منفی ہوتا ہے۔ پس اِن دونوں حصّوں کا جبری مجموعہ صفر ہے اور اس لیے مطلوبہ معیّن تکملہ کی قیمت بھی صفر ہے۔

یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر کسی تفاعل کے رقبہ کا پورا یا زیادہ حصہ

محور لا کے نیچے واقع ہو تو رقبہ منفی حاصل ہو گا یعنے معین تکملہ کی قیمت منفی بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال (۶) $\int_0^{\text{ا}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2+\text{ا}^2}$ کو تکمل کرو۔

چونکہ $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2+\text{ا}^2} = \frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

اس لیے $\int_0^{\text{ا}} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2+\text{ا}^2} = \left[\frac{1}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right]_0^{\text{ا}} = \frac{1}{\text{ا}}\left\{\text{مس}^{-1}\frac{\text{ا}}{\text{ا}} - \text{مس}^{-1}\frac{0}{\text{ا}}\right\}$

$= \frac{1}{\text{ا}}\,\frac{\pi}{4}$

مثال (۷) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^3\text{لا}\ \text{جب}^2\text{لا}\ \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو:-

دفعہ ۴، ۵ کی مثال (۵) میں ہم نے دیکھا ہے کہ

$\int \text{جم}^3\text{لا}\ \text{جب}^2\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{1}{5}\text{جم}^2\text{لا}\ \text{جب}^3\text{لا} - \frac{2}{3\times5}\text{جم}^2\text{لا}\ \text{جب لا} + \frac{2}{3\times5}\text{جب لا}$

اس تکملہ کی پہلی دو رقموں میں جم لا اور جب لا دونوں شامل ہیں۔ جزو جم لا کی موجودگی کی وجہ سے حد $\frac{\pi}{2}$ پر اور جزو جب لا کی موجودگی کی وجہ سے حد ۰ پر یہ رقمیں صفر ہو جاتی ہیں، مثلاً

$\left[\text{جم}^2\text{لا}\ \text{جب}^3\text{لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left\{(\text{جم}\tfrac{\pi}{2})^2(\text{جب}\tfrac{\pi}{2})^3 - (\text{جم}\,0)^2(\text{جب}\,0)^3\right\} = 0$

$\left[\text{جم}^2\text{لا}\ \text{جب لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left\{(\text{جم}\tfrac{\pi}{2})^2(\text{جب}\tfrac{\pi}{2}) - (\text{جم}\,0)^2(\text{جب}\,0)\right\} = 0$

اگر آخری رقم کو انہی حدود پر لیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$\left[\frac{2}{3\times5}\text{جب لا}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3\times5}\left\{\text{جب}\frac{\pi}{2} - \text{جب}\,0\right\}$

$= \frac{2}{3\times5}$

$$\text{پس } \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{۳}\text{ لا جب}^{۲}\text{ لا فرلا} = \frac{۲}{۳\times۵} = \frac{۲}{۱۵}$$

مثال (۸) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{ن}\text{ لا جب}^{م}\text{ لا فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو جہاں م اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہیں۔

اس سوال میں ن اور م کے طاق یا جفت ہونے کے لحاظ سے چار صورتیں پیش آتی ہیں۔

(ا) اگر ن اور م دونوں طاق ہیں تو دفعہ ۴۵ کی مثال (۸) مساوات (۴) سے معلوم ہے کہ

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{ن}\text{ لا جب}^{م}\text{ لا فرلا} = \frac{۱}{ن+م}\text{ جم}^{ن-۱}\text{ لا جب}^{م+۱}\text{ لا} - \frac{۱}{ن+م}\,\frac{ن-۱}{ن+م-۲}\text{ جم}^{ن-۱}\text{ لا جب}^{م-۱}\text{ لا}$$

$$+\cdots+\frac{(ن-۱)(ن-۳)\cdots۴\times۲\,(م-۱)(م-۳)\cdots۴\times۲}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots۴\times۲}\text{ جب}^{۲}\text{ لا}$$

چونکہ آخری رقم کے سوا باقی تمام رقموں میں جب لا اور جم لا دونوں شامل ہیں اس لیے حدود ۰ اور $\frac{\pi}{2}$ پر یہ تمام رقمیں صفر ہو جائینگی اور صرف آخری رقم رہ جائیگی۔ نیز

$$\left[\frac{(ن-۱)(ن-۳)\cdots۴\times۲\,(م-۱)(م-۳)\cdots۴\times۲}{(ن+م)(ن+م-۲)(ن+م-۴)\cdots۴\times۲}\text{ جب}^{۲}\text{ لا}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(ن-۱)(ن-۳)\cdots۴\times۲\,(م-۱)\cdots۲}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots۴\times۲}\left\{\text{جب}^{۲}\frac{\pi}{2} - \text{جب}^{۲}\,۰\right\}$$

$$= \frac{(ن-۱)(ن-۳)\cdots۲\,(م-۱)\cdots۲}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots۴\times۲}\times۱$$

پس اگر ن اور م دونوں طاق ہوں تو

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{جم}^{ن}\text{ لا جب}^{م}\text{ لا فرلا} = \frac{(ن-۱)\cdots۲\,(م-۱)\cdots۲}{(ن+م)(ن+م-۲)\cdots۴\times۲}\times۱ \qquad (۱)$$

اسی طرح باقی تمام صورتوں میں بھی آخری رقم کے سوا باقی سب رقمیں دونوں حدود ۰ اور $\frac{\pi}{2}$ پر صفر ہو جائینگی اس لیے صرف آخری رقموں کی قیمت

معلوم کر لینا کافی ہے۔

(ب) اگر ن طاق اور م جفت ہو تو دفعہ ۴ء۵ کی مثال ۸ مساوات (۵) سے ظاہر ہے کہ

$$\left[\frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)\cdots ۲\times(\text{م}-۱)(\text{م}-۳)\cdots ۳\times ۱}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۵\times ۳\times ۱}\ \text{جب لا}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{(\text{ن}-۱)\cdots ۲\times(\text{م}-۱)\cdots ۳\times ۱}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۳\times ۱}\left\{\text{جب}\,\frac{\pi}{۲}-۰\right\}$$

پس اگر ن طاق اور م جفت ہو تو

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا جب}^{\text{م}}\text{لا قرلا}=\frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)\cdots ۲\times(\text{م}-۱)(\text{م}-۳)\cdots ۳\times ۱}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۵\times ۳\times ۱}\times ۱ \qquad (۲)$$

(ج) اگر ن جفت اور م طاق ہو تو دفعہ ۴ء۵ کی مثال ۸ مساوات (۶) سے ظاہر ہے کہ

$$-\left[\frac{(\text{ن}-۱)\cdots ۳\times ۱(\text{م}-۱)\cdots ۴\times ۲}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۵\times ۳\times ۱}\ \text{جم لا}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=-\frac{(\text{ن}-۱)\cdots ۳\times ۱(\text{م}-۱)\cdots ۴\times ۲}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۵\times ۳\times ۱}\left\{\text{جم}\,\frac{\pi}{۲}-\text{جم}\,۰\right\}$$

پس اگر ن جفت اور م طاق ہو تو

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا جب}^{\text{م}}\text{لا قرلا}=\frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)\cdots ۳\times ۱(\text{م}-۱)(\text{م}-۳)\cdots ۴\times ۲}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۵\times ۳\times ۱}\times ۱ \qquad (۳)$$

(د) اگر ن اور م دونوں جفت ہوں تو دفعہ ۴ء۵ کی مثال ۸ مساوات (۷) سے معلوم ہے کہ

$$\left[\frac{(\text{ن}-۱)\cdots ۳\times ۱(\text{م}-۱)\cdots ۳\times ۱}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۴\times ۲}\ \text{لا}\right]_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}$$

$$=\frac{(\text{ن}-۱)\cdots ۳\times ۱(\text{م}-۱)\cdots ۳\times ۱}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۴\times ۲}\left\{\frac{\pi}{۲}-۰\right\}$$

پس اگر ن اور م دونوں جفت ہوں تو

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{\text{ن}}\,\text{لا}\ \text{جب}^{\text{م}}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{(\text{ن}-۱)(\text{ن}-۳)\cdots ۴\times۱\ (\text{م}-۱)(\text{م}-۳)\cdots ۳\times۱}{(\text{ن}+\text{م})(\text{ن}+\text{م}-۲)\cdots ۶\times۴\times۲} \times \frac{\pi}{۲} \quad (۴)$$

صرف اُس صورت میں جبکہ ن اور م دونوں جفت ہوں آخری عدد $\frac{\pi}{۲}$ حاصل ہوتا ہے ورنہ باقی تمام صورتوں میں آخری حاصل ضرب ۱ ہوتا ہے۔

حسب ذیل عددی مثالوں سے یہ قاعدے بخوبی واضح ہونگے:-

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۵}\,\text{لا}\ \text{جب}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۲\times۴\times۶\times۲\times۴}{۲\times۴\times۶\times۸\times۱۰\times۱۲} \times ۱ = \frac{۱}{۱۲۰}$$

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۵}\,\text{لا}\ \text{جب}^{۶}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۱\times۳\times۵\times۲\times۴}{۳\times۵\times۷\times۹\times۱۱} \times ۱ = \frac{۸}{۶۹۳}$$

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۸}\,\text{لا}\ \text{جب}^{۹}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۲\times۴\times۶\times۸\times۱\times۳\times۵\times۷}{۱\times۳\times۵\times۷\times۹\times۱۱\times۱۳\times۱۵\times۱۷} = \frac{۳۸۴}{۳۲۸۲۰۵}$$

$$\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}} \text{جم}^{۸}\,\text{لا}\ \text{جب}^{۱۰}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۱\times۳\times۵\times۷\times۹\times۱\times۳\times۵\times۷}{۲\times۴\times۶\times۸\times۱۰\times۱۲\times۱۴\times۱۶\times۱۸} \times \frac{\pi}{۲}$$

امثلہ ۷، ۸ اور ۹ کے نتیجوں کی نظری اور عملی ریاضی میں اکثر ضرورت پڑتی ہے طالب علم کو چاہیے کہ اِن نتائج کو بخوبی ذہن نشین کرلے۔

مشقی سوالات ۲۵

حسبِ ذیل معین تکملوں کی قیمت دریافت کرو:-

(۱) $\int \left(\text{لا}^{۳} + \frac{۱}{۲}\text{لا}^{۲} - ۱۱\text{لا} + \frac{۷}{۲}\right) \text{فرلا}$ (۲) $\int_{۱} \frac{\text{فرلا}}{۴\text{لا}^{۲} - ۹}$

(۳) $\int^{\frac{۲}{۳}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۴ - ۹\text{لا}^{۲}}}$ (۴) $\int_{۲}^{۶} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۴}}$

(۵) $\int_{۳} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲} + ۶\text{لا} + ۱۸}$

(۶) $\int_{-\frac{2}{5}}^{+\frac{13}{5}}$ فرلا / √۲۲۱ - ۲۰لا - ۲۵لا^2 (۷) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ۱ / ۲جم^{2}لا + ۸جب^{2}لا فرلا

(۸) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}$ ۱-لا / ۱-لا+لا^2 فرلا   (۹) $\int_{0}^{\pi}$ جب^{2}لا فرلا

(۱۰) $\int_{0}^{\pi}$ ۱ / ۵+۴جب لا فرلا   (۱۱) $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}$ جب^2 ۳ طہ فرطہ

(۱۲) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^4 طہ فرطہ   (۱۳) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جم^5 طہ فرطہ

(۱۴) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^3 طہ جم^6 طہ فرطہ   (۱۵) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^3 طہ جم^4 طہ فرطہ

(۱۶) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جب^4 طہ جم^5 طہ فرطہ

۶،۵- معین تکملہ میں متغیر کی تبدیلی:-

دفعہ ۳،۵ میں جب ہم نے غیر معین تکملہ میں متغیر کی تبدیلی کا قاعدہ بیان کیا تھا تو اُسی کے ساتھ یہ بھی ذکر کیا تھا کہ جب کبھی ایک غیر معین تکملہ میں متغیر کو لا سے ما میں تبدیل کیا جائے تو آخری جواب بیان کرتے وقت پھر معکوس تبدیلی کے ذریعہ ما کو لا میں تبدیل کرنا چاہیے۔

لیکن معیّن تکملہ چونکہ لا یا ما کسی کا تفاعل نہیں ہے بلکہ ایک مستقل عدد ہے اس لیے اگر ہم متکمل کو بدلنے کے ساتھ تکمل کے حدود ا اور ب کو بھی بدل دیں تو جواب کو بالراست تبدیل شدہ متغیر کے ذریعہ حاصل کر سکتے ہیں پھر دوبارہ ابتدائی متغیر میں لانے کی ضرورت نہیں پڑتی۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}$ ق (لا) فرلا معیّن تکملہ معلوم کرنا ہے

جہاں لا۱ اور لا۲ دو مستقل قیمتیں ہیں۔ متکمل ف (لا) کو معیاری شکل میں لانے کے لیے فرض کرو کہ ہم

لا = فہ (ع)، فرلا / فرع = فہَ (ع)، فرلا = فہَ (ع) فرع (۱)

رکھتے ہیں۔ مساوات (۱) میں چونکہ لا اور ع ایک دوسرے پر منحصر ہیں اس لیے لا کی ہر قیمت کے جواب میں ع کی متناظر قیمت ملتی ہے یعنے

لا = لا۱ تو ع = ع۱، لا = لا۲ تو ع = ع۲ (۲)

پس

∫ (لا۱ سے لا۲) ف (لا) فرلا = ∫ (ع۱ سے ع۲) ف {فہ (ع)} فہَ (ع) فرع

یعنے اگر سہ (ع) = ف {فہ (ع)} فہَ (ع) تو

∫ (لا۱ سے لا۲) ف (لا) فرلا = ∫ (ع۱ سے ع۲) سہ (ع) فرع (۳)

اس لیے آخری جواب معلوم کرنے کے لیے سہ (ع) کا معین تکملہ ع۱ سے ع۲ تک معلوم کر لینا کافی ہے۔ پھر دوبارہ لا میں تبدیل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ذیل کی مثالوں سے یہ امر بخوبی واضح ہوجائیگا۔

مثال (۱) ∫ (۴ لا + ۱)^(۳/۲) فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو ما = ۴ لا + ۱ یعنے لا = ۱/۴ (ما - ۱)

تو

فرلا / فرما = ۱/۴، فرلا = ۱/۴ فرما

نیز لا = ۰ تو ما = ۱، لا = ۱ تو ما = ۴ × ۱ + ۱ = ۵

پس

∫ (لا = ۰ سے لا = ۱) (۴ لا + ۱)^(۳/۲) فرلا = ۱/۴ ∫ (ما = ۱ سے ما = ۵) ما^(۳/۲) فرما = ۱/۴ [ما^(۳/۲ + ۱) / (۳/۲ + ۱)] (۱ سے ۵)

$$=\frac{۱}{۴}\left\{\frac{۵^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}}-\frac{۱}{\frac{۵}{۲}}\right\}=\frac{۱}{۱۰}\left\{۲۵\sqrt{۵}-۱\right\}$$

مثال (۲) - $\int_{۰}^{۱}\frac{\text{لا}}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو لا = مس طہ، تب طہ = $\text{مس}^{-۱}$ لا

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}}=\text{قط}^{۲}\,\text{طہ}$ ، فرلا = $\text{قط}^{۲}$ طہ فرطہ

$$\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}=\sqrt{۱+\text{مس}^{۲}\,\text{طہ}}=\text{قط طہ}$$

لا = ۰ تو طہ = ۰، لا = ۱ تو طہ = $\frac{\pi}{۴}$

پس

$$\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}\,\text{فرلا}=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\frac{\text{مس طہ قط}^{۲}\,\text{طہ فرطہ}}{\text{قط طہ}}$$

$$=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}\text{مس طہ قط فرطہ}=\Big[\text{قط طہ}\Big]_{۰}^{\frac{\pi}{۴}}$$

$$=\text{قط}\,\frac{\pi}{۴}-\text{قط}\,۰=\sqrt{۲}-۱$$

مثال (۳) $\int_{۰}^{۱۶}\frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۴}}}{۱+\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو:-

رکھو لا = $\text{ع}^{۴}$، ع = $\text{لا}^{\frac{۱}{۴}}$ ، $\text{ع}^{۲}=\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}$

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}=۴\text{ع}^{۳}$ ، فرلا = $۴\text{ع}^{۳}$ فرع

لا = ۰ تو ع = ۰، لا = ۱۶ تو ع = $۱۶^{\frac{۱}{۴}}=۲$

پس

$$\int_{۰}^{۱۶}\frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۴}}}{۱+\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}}\,\text{فرلا}=۴\int_{۰}^{۲}\frac{\text{ع}\times\text{ع}^{۳}}{۱+\text{ع}^{۲}}\,\text{فرع}=۴\int_{۰}^{۲}\frac{\text{ع}^{۴}}{۱+\text{ع}^{۲}}\,\text{فرع}$$

لیکن

$$\frac{\text{ع}^{۴}}{۱+\text{ع}^{۲}}=\frac{\text{ع}^{۴}-۱+۱}{۱+\text{ع}^{۲}}=\frac{\text{ع}^{۴}-۱}{۱+\text{ع}^{۲}}+\frac{۱}{۱+\text{ع}^{۲}}$$

$$=(\text{ع}^{۲}-۱)+\frac{۱}{۱+\text{ع}^{۲}}$$

پس $\int_{۰}^{۱۶} \frac{لا^{\frac{۱}{۲}}}{۱+لا^{\frac{۱}{۴}}}\, فرلا = ۴\int_{۰}^{۲} (ع^{۲}-۱)\, فرع + ۴\int_{۰}^{۲} \frac{۱}{۱+ع^{۲}}\, فرع$

$$= ۴\left[\frac{ع^{۳}}{۳} - ع\right]_{۰}^{۲} + ۴\left[مس^{-۱} ع\right]_{۰}^{۲}$$

$$= ۴\left\{\frac{۲^{۳}}{۳} - ۲\right\} + ۴\left\{مس^{-۱}\, ۲\right\} = \frac{۸}{۳} + ۴\, مس^{-۱}\, ۲$$

اسی طرح اگر کسی معین تکملہ میں کئی مرتبہ متغیر کو تبدیل کرنے کی ضرورت پڑے تو ہر مرتبہ تکمل کے حدود کو بھی ساتھ ہی ساتھ بدلتے جانا چاہیے۔

مشقی سوالات ۲۶

حسب ذیل تکملوں کی قیمت معلوم کرو :-

(۱) $\int_{۲}^{۴} \sqrt{۳لا-۵}\; فرلا$ (۲) $\int_{۱}^{۴} \frac{فرلا}{\sqrt{۵-لا}}$

(۳) $\int_{۲}^{۶} \sqrt{لا-۲}\; فرلا$ (۴) $\int_{۰}^{۶} \left(\sqrt{۶} - \sqrt{لا}\right)^{۲} فرلا$

(۵) $\int_{۰}^{۲} لا^{۲}\sqrt{۱+لا^{۳}}\; فرلا$ (۶) $\int_{۰}^{۱} \frac{فرلا}{۹لا^{۲}-۶لا+۱}$

(۷) $\int_{۲}^{۴} \frac{لا\; فرلا}{\sqrt{۲۵-لا^{۲}}}$ (۸) $\int_{۱}^{۲} \sqrt{\frac{لا^{۲}-۱}{لا}}\; فرلا$

(۹) $\int_{۰}^{۴} \frac{لا^{۲}\; فرلا}{\sqrt{۱۶-لا^{۲}}}$ (۱۰) $\int_{۰}^{ل} \sqrt{ب^{۲} - \frac{ب^{۲}لا^{۲}}{ل^{۲}}}\; فرلا$

۵۷- مثلثی ابدال۔

اکثر تفاعلوں کو جن میں مقادیر اصم مثلاً جذر المربع وغیرہ شامل ہوں تکمل کرنے کے لیے ایک بہت مفید اور کارآمد طریقہ یہ ہے کہ متغیر لا کو بدل کر مثلثی تفاعل

جب طہ، جم طہ، مس طہ یا قطا طہ داخل کیے جائیں۔ اس کی مدد سے تفاعل بالعموم جبم طہ جمن طہ یا مسم طہ، قطن طہ، وغیرہ، شکل میں متغیر ہو جاتے ہیں اور ان آخری تکملوں کو ہم گذشتہ دفعات کی مدد سے معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال (۱) پہلی مثال کے طور پر تکملہ $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا}$ پر غور کرو جس کی قیمت اس سے قبل ہم دو مرتبہ مختلف طریقوں سے معلوم کر چکے ہیں۔

رکھو لا = ا جب طہ، تو $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} = \text{ا جم طہ}$، فرلا = ا جم طہ فرطہ

$$\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ا}^2\ \text{جب}^2\ \text{طہ}} = \sqrt{\text{ا}^2(1 - \text{جب}^2\ \text{طہ})} = \sqrt{\text{ا}^2\ \text{جم}^2\ \text{طہ}} = \text{ا جم طہ}$$

پس $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \int \text{ا جم طہ} \cdot \text{ا جم طہ فرطہ} = \text{ا}^2 \int \text{جم}^2\ \text{طہ فرطہ}$

$$= \text{ا}^2 \int \frac{\text{جم ۲طہ} + 1}{2}\ \text{فرطہ} = \frac{\text{ا}^2}{2} \cdot \frac{\text{جب ۲طہ}}{2} + \frac{\text{ا}^2}{2}\ \text{طہ} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{ا}^2}{2}\ \text{جب طہ جم طہ} + \frac{\text{ا}^2}{2}\ \text{طہ} + \text{ک}$$

اب چونکہ یہ تکملہ غیر معین ہے اس لیے آخری جواب لا کی رقوم میں دریافت کرنا چاہیئے۔

پس $\text{جب طہ} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$، $\text{جم طہ} = \frac{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}{\text{ا}}$، $\text{طہ} = \text{جب}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

اس لیے $\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \frac{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}{2} + \frac{\text{ا}^2}{2}\ \text{جب}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{ک}$

یہ قیمت وہی ہے جو مذکورۂ بالا دونوں طریقوں سے حاصل ہوئی تھی (دیکھو دفعہ ۲، ۵ مثال ۲۳ اور دفعہ ۴، ۵ مثال ۵)۔

مثال (۲) $\int \frac{\text{لا}^2}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}\ \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو:—

رکھو $\text{لا} = \text{ا}\,\text{مس طہ}$، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} = \text{ا}\,\text{قط}^{۲}\text{طہ}$، $\text{فرلا} = \text{ا}\,\text{قط}^{۲}\text{طہ فرطہ}$

$$\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}} = \sqrt{\text{ا}^{۲}\,\text{مس}^{۲}\text{طہ}+\text{ا}^{۲}} = \sqrt{\text{ا}^{۲}\,\text{قط}^{۲}\text{طہ}} = \text{ا}\,\text{قط طہ}$$

پس

$$\int \frac{\text{لا}^{۳}}{\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{ا}^{۳}\,\text{مس}^{۳}\text{طہ}\,.\,\text{ا}\,\text{قط}^{۲}\text{طہ}}{\text{ا}\,\text{قط طہ}}\,\text{فرطہ} = \int \text{ا}^{۳}\,\text{مس}^{۳}\text{طہ قط طہ فرطہ}$$

$$= \int \text{ا}^{۳}\,\text{مس}^{۲}\text{طہ}\,.\,\text{مس طہ قط طہ فرطہ} = \text{ا}^{۳}\,.\int (\text{قط}^{۲}\text{طہ} - ۱)\,\text{مس طہ قط طہ فرطہ}$$

$$= \text{ا}^{۳}\,\frac{\text{قط}^{۳}\text{طہ}}{۳} - \text{ا}^{۳}\,\text{قط طہ} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{ا}^{۳}}{۳}(۱+\text{مس}^{۲}\text{طہ})^{\frac{۳}{۲}} - \text{ا}^{۳}(۱+\text{مس}^{۲}\text{طہ})^{\frac{۱}{۲}} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{ا}^{۳}}{۳}\left\{۱+\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\right\}^{\frac{۳}{۲}} - \text{ا}^{۳}\left\{۱+\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}}\right\}^{\frac{۱}{۲}} + \text{ک}$$

$$= \frac{۱}{۳}(\text{ا}^{۲}+\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} - \text{ا}^{۲}\sqrt{\text{ا}^{۲}+\text{لا}^{۲}} + \text{ک}$$

مثال (۳) $\int \frac{\sqrt{\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲}}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو $\text{لا} = \text{ا}\,\text{قط طہ}$، $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}} = \text{ا}\,\text{قط طہ مس طہ}$، $\text{فرلا} = \text{ا}\,\text{قط طہ مس طہ فرطہ}$

$$\sqrt{\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲}} = \sqrt{\text{ا}^{۲}\,\text{قط}^{۲}\text{طہ}-\text{ا}^{۲}} = \sqrt{\text{ا}^{۲}\,\text{مس}^{۲}\text{طہ}} = \text{ا}\,\text{مس طہ}$$

پس

$$\int \frac{\sqrt{\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲}}}{\text{لا}}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{ا}\,\text{مس طہ}}{\text{ا}\,\text{قط طہ}}\,\text{ا}\,\text{قط طہ مس طہ فرطہ} = \int \frac{\text{مس}^{۲}\text{طہ}}{\text{قط طہ}}\,\text{فرطہ}$$

$$= \int \frac{\text{قط}^{۲}\text{طہ}-۱}{\text{قط طہ}}\,\text{فرطہ} = \int (\text{قط طہ} - \text{جم طہ})\,\text{فرطہ}$$

$$= \text{لوک}\,(\text{مس طہ} + \text{قط طہ}) - \text{جب طہ} + \text{ک}$$

$$= \text{لوک}\left\{\frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲}}}{\text{ا}}\right\} - \frac{\sqrt{\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲}}}{\text{لا}} + \text{ک}$$

ان تینوں مثالوں سے ظاہر ہے کہ اگر متکمل میں $\sqrt{\text{ا}^{۲}-\text{لا}^{۲}}$ شامل ہوتو

لا = ا جب طہ یا لا = ا جم طہ رکھنا چاہیے۔ اگر متکمل میں $\sqrt{ا^{۲} + لا^{۲}}$ شامل ہو تو لا = ا مس طہ رکھنا چاہیے اور اگر متکمل میں $\sqrt{لا^{۲} - ا^{۲}}$ شامل ہو تو لا = ا قط طہ رکھنا چاہیے۔

مثلثی ابدال کا فائدہ زیادہ تر معین تکملوں میں معلوم ہوتا ہے جہاں پیچیدہ تکملوں کی قیمت آسانی سے حاصل ہوجاتی ہے۔

مثال (۴) $\int_{0}^{ا} لا^{۴} (ا^{۲} - لا^{۲})^{\frac{۵}{۲}}$ فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو لا = ا جم طہ (لا = ا جب طہ رکھیں بھی تو یہی قیمت حاصل ہوگی)

$$ا^{۲} - لا^{۲} = ا^{۲} - ا^{۲} جم^{۲} طہ = ا^{۲} جب^{۲} طہ$$

$$\frac{فرلا}{فرطہ} = ا جب طہ$$

$$لا = ۰ \text{ تو } طہ = \frac{\pi}{۲}، \quad لا = ا \text{ تو } طہ = ۰$$

پس $\int_{0}^{ا} لا^{۴} (ا^{۲} - لا^{۲})^{\frac{۵}{۲}} فرلا = - \int_{\frac{\pi}{۲}}^{0} ا^{۴} جم^{۴} طہ . (ا^{۲} جب^{۲} طہ)^{\frac{۵}{۲}} ا جب طہ فرطہ$

$$= + \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} ا^{۴} جم^{۴} طہ . ا^{۵} جب^{۵} طہ . ا جب طہ فرطہ$$

$$= ا^{۱۰} \int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} جم^{۴} طہ جب^{۶} طہ فرطہ$$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}} جم^{ن} لا جب^{م} لا$ فرلا کے لیے دفعہ ۵۳، ۵ کی مثال ۹ مساوات (۴) استعمال کرسکتے ہیں کیونکہ یہاں ن = ۴، م = ۶ دونوں جفت ہیں۔ اس لیے

$$\int_{0}^{ا} لا^{۴} (ا^{۲} - لا^{۲})^{\frac{۵}{۲}} فرلا = ا^{۱۰} \quad \frac{\pi}{۲} \times \frac{(۵-۶)(۳-۶)(۱-۶)(۳-۴)(۱-۴)}{(۸-۱۰)(۶-۱۰)(۴-۱۰)(۲-۱۰)۱۰}$$

$$= \frac{۳\pi}{۵۱۲}$$

مثال (۵) ∫ₒ^ا لا² √(ا - لا) فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو لا = ا جب² طہ ، فرلا / فرطہ = ۲ ا جب طہ جم طہ

ا - لا = ا - ا جب² طہ = ا جم² طہ

لا = ۰ تو طہ = ۰ ، لا = ا تو طہ = π/۲

پس ∫ₒ^ا لا² √(ا - لا) فرلا = ∫ₒ^(π/۲) ا² جب⁴ طہ . √ا جم طہ . ۲ ا جب طہ جم طہ فرطہ

= ۲ ا^(۷/۲) ∫ₒ^(π/۲) جب⁵ طہ جم² طہ فرطہ

= ۲ ا^(۷/۲) . ((۱-۲) (۳-۵) (۱-۵)) / ((۲-۷) (۴-۷) (۶-۷)) × ۱

= ۱۶/۱۰۵ ا^(۷/۲)

مثال (۶) ∫ₒ^(۲ا) لا³ √(۲ ا لا - لا²) فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو لا = ۲ ا جب² طہ ، فرلا / فرطہ = ۴ ا جب طہ جم طہ

۲ ا لا - لا² = ۲ ا . ۲ ا جب² طہ - ۴ ا² جب⁴ طہ = ۴ ا² جب² طہ (۱ - جب² طہ)

لا = ۰ تو طہ = ۰ ، لا = ۲ ا تو طہ = π/۲

پس ∫ₒ^(۲ا) لا³ √(۲ ا لا - لا²) فرلا = ∫ₒ^(π/۲) ۸ ا³ جب⁶ طہ . ۲ ا جب طہ جم طہ . ۴ ا جب طہ جم طہ فرطہ

= ۶۴ ا⁵ ∫ₒ^(π/۲) جم² طہ جب⁸ طہ فرطہ

= ۶۴ ا⁵ ((۷-۸)(۵-۸)(۳-۸)(۱-۸)(۱-۲)) / ((۸-۱۰)(۶-۱۰)(۴-۱۰)(۲-۱۰)۱۰) × π/۲

= ۲۱ π ا⁵ / ۲۴

مشقی سوالات ۲۷

حسب ذیل تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-

(۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$ (۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۴\text{لا}^{۲} + ۹}}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۳}}$ (۴) $\int \frac{\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱۶}}{\text{لا}}\,\text{فرلا}$

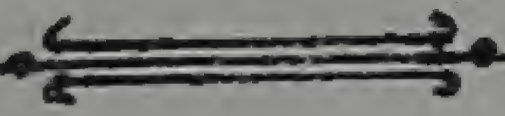
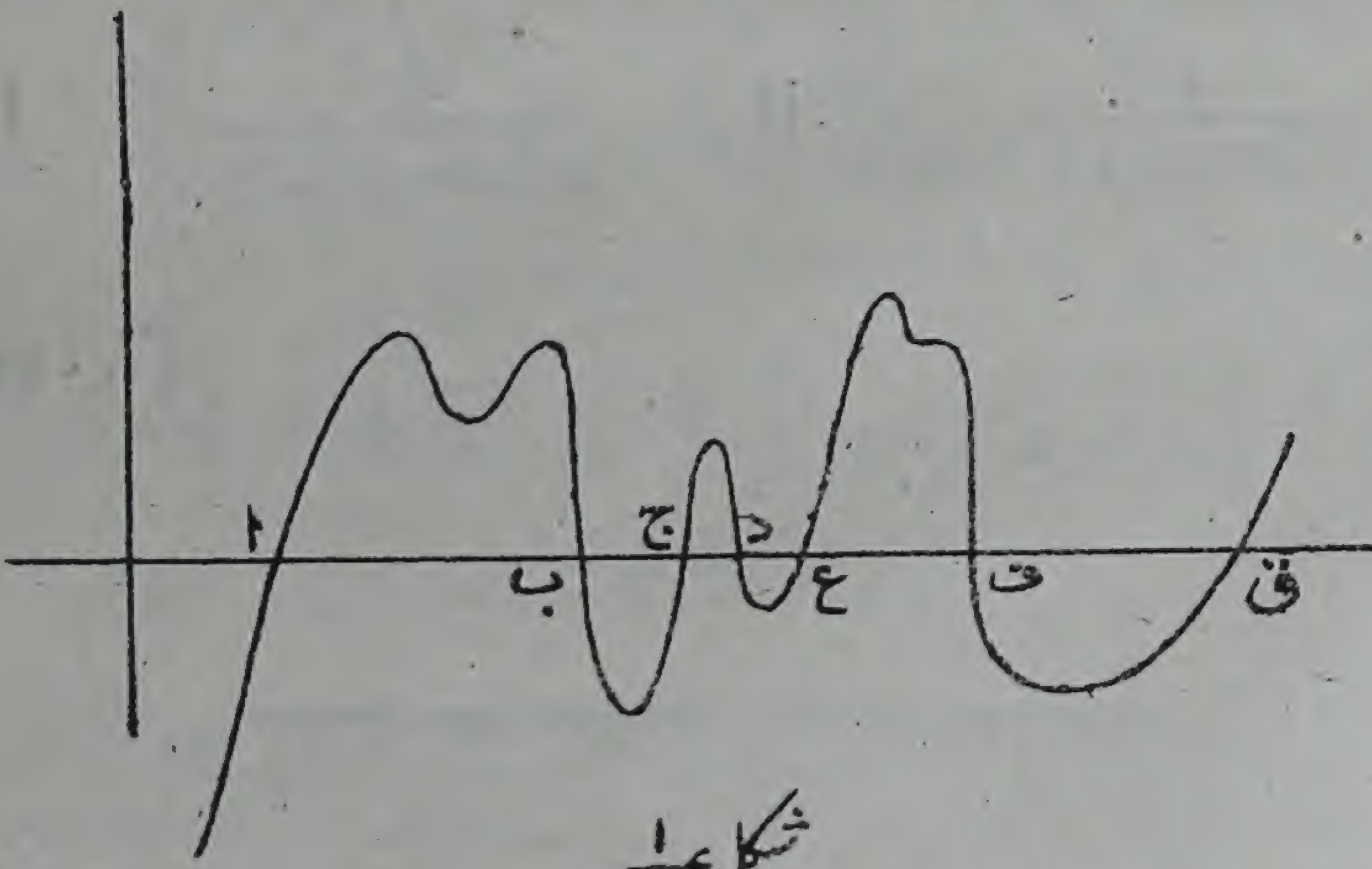
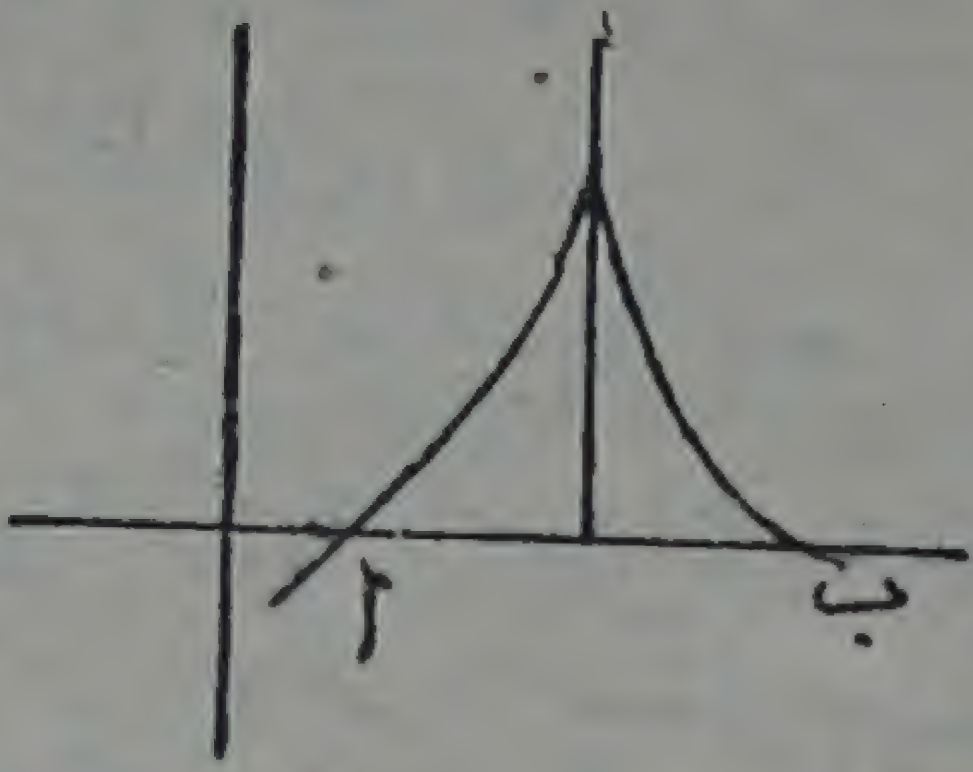
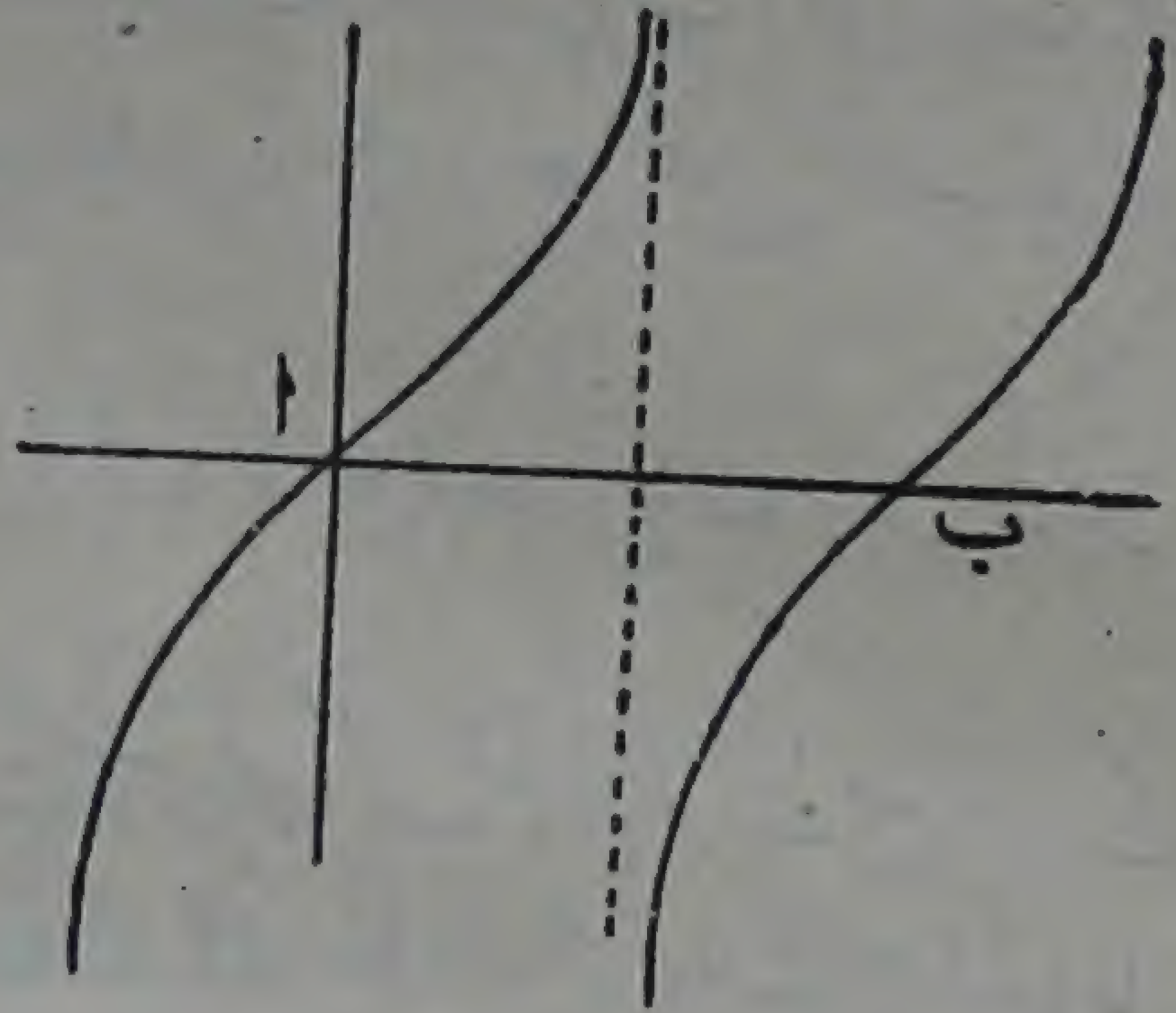
(۵) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}\sqrt{۵ - \text{لا}^{۲}}}$ (۶) $\int \frac{\sqrt{\text{لا}^{۲} - ۳۶}}{\text{لا}^{۲}}\,\text{فرلا}$

(۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{۹ - \text{لا}^{۲}}}$ (۸) $\int \frac{\sqrt{۴ - \text{لا}^{۲}}}{\text{لا}^{۲}}\,\text{فرلا}$

(۹) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا} + ۷)^{۲}}$ (۱۰) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}(\text{ا} - \text{لا})}}$

(۱۱) $\int_{۰}^{\pi} \frac{\text{فرلا}}{\text{ا}^{۲}\text{جم}^{۲}\text{لا} + \text{ب}^{۲}\text{جب}^{۲}\text{لا}}$ (۱۲) $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{۱ + \text{لا} + \text{لا}^{۲}}$

(۱۳) $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{۱ - \text{لا} + \text{لا}^{۲}}$

باب ششم

۱۵۹ - **رول کا مسئلہ** :— اگر ف (لا) متغیر لا کا مسلسل تفاعل ہو اور لا = ا اور لا = ب کے لیے ف (لا) صفر کے مساوی ہو یعنی ف (ا) = ف (ب) = صفر، نیز ان حدود میں فَ (لا) مسلسل ہو تو رول کا مسئلہ بیان کرتا ہے کہ فَ (لا) کی قیمت ا اور ب کے درمیان لا کی کم از کم ایک قیمت کے لیے صفر ہوگی یعنی فَ (لا۱) = ۰ جہاں ا < لا۱ < ب

شکل ۱

شکل ۲

شکل ۳

شکل (۱) سے ظاہر ہے کہ ف (لا) = ۰ کی ہر دو اصلوں کے درمیان فَ (لا) کم از کم ایک مرتبہ اور بعض صورتوں میں ۳، ۵، ... وغیرہ طاق مرتبہ صفر ہے۔ شکل (۲) اور (۳) میں مسئلہ کی شرائط پوری نہیں ہوتی ہیں۔ شکل (۲) میں منحنی اور ڈھال دونوں غیر مسلسل ہیں اور شکل (۳) میں ڈھال غیر مسلسل ہے اس لیے مسئلہ رول کا ان پر اطلاق نہیں ہو سکتا۔ مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ف (ا) = ف (ب) = صفر

اب یا تو تفاعل ف (لا) نقاط ا اور ب کے درمیان تمام نقطوں پر صفر رہیگا اور ایسی صورت میں لا کی تمام قیمتوں کے لیے ف (لا) = ۰ اور اس لیے فَ (لا) = ۰ اور مسئلہ ثابت ہوگیا یا نقطہ ا کے بعد ف (لا) کی قیمت بڑھیگی یا گھٹیگی۔ اگر بڑھیگی تو فَ (لا) مثبت ہوگا۔ اور پھر ف (ب) = ۰ کے لیے ضروری ہے کہ کسی نقطہ کے بعد ف (لا) کی قیمت گھٹنا شروع کرے یعنی فَ (لا) منفی ہو۔ اب اگر ف (لا) اور فَ (لا) مسلسل ہوں تو ضروری ہے کہ کسی نقطہ پر فَ (لا) نہ مثبت ہوگا نہ منفی، یعنی فَ (لا) = صفر اور مسئلہ رول ثابت ہوگیا۔

اگر نقطہ ا کے بعد ف (لا) گھٹتا تو ف (ب) = ۰ کے لیے ضروری ہے کہ کسی نہ کسی نقطہ کے بعد بڑھنا شروع کرے اور اس نقطہ پر فَ (لا) نہ منفی ہو سکتا ہے اور نہ مثبت۔ اس لیے فَ (لا) صفر ہوگا اور مسئلہ ثابت ہوگیا۔ بہت ممکن ہے کہ ا اور ب کے درمیان ف (لا) یکے بعد دیگرے کئی مرتبہ بڑھے

اور کئی مرتبہ گھٹے - ایسی صورت میں ا اور ب کے درمیان فَ (لا) ایک سے زیادہ طاق مرتبہ صفر ہوگا - اگر نقطہ ب کے بجائے ا + ھ لکھیں تو مسئلہ کو یوں لکھ سکتے ہیں :—

کہ ف (ا) = ف (ا + ھ) = ۰ تو فَ (ا + طہ ھ) = ۰ جہاں ۰ < طہ < ۱

یعنی طہ مثبت کسرِ واجب ہے -

چونکہ یہ مسئلہ بہت اہم ہے اس کا ایک تحلیلی ثبوت مع قیود کے دیا جائیگا - اگر یہ ثبوت مشکل معلوم ہو تو کتاب کے پہلے مطالعہ میں اسے چھوڑ دیا جائے -

تفاعل ف (لا) مسلسل ہے اور ف (ا) = ف (ب) = صفر تو چونکہ ہر مسلسل تفاعل کی بند وقفہ میں ایک سب سے بڑی قیمت ع اور ایک سب سے چھوٹی قیمت ق ہوتی ہے (جو باب دوم میں ثابت کیا گیا ہے) مسئلہ کے ثبوت میں دو صورتیں ہیں :

صورت اول میں فرض کرو کہ ع = ق = صفر اس لیے ف (لا) تمام قیمتوں کے لیے صفر ہے اور فَ (لا) = صفر اور مسئلہ ثابت ہوا -

صورت دوم میں ع ≠ صفر تو متغیر کی کسی خاص قیمت لا۱ کے لیے ف (لا۱) = ع اور اگر ھ کوئی مثبت مقدار ہو تو ف (لا۱ + ھ) < ف (لا۱)

اور $\frac{\text{ف (لا۱ + ھ) - ف (لا۱)}}{\text{ھ}}$ < صفر

اور لا۱ کی مثبت جانب سے انتہا میں فَ (لا۱) ≥ صفر

نیز ف (لا۱ - ھ) < ف (لا۱)

اس لیے $\frac{\text{ف (لا۱ - ھ) - ف (لا۱)}}{\text{ھ}}$ < صفر

اب (-۱) سے ضرب دینے سے لا تساوات الٹ جاتی ہے -

اور $\frac{\text{ف (لا۱ - ھ) - ف (لا۱)}}{\text{- ھ}}$ > صفر

اس لیے لا۱ کی منفی جانب سے انتہا میں فَ (لا۱) ≤ صفر

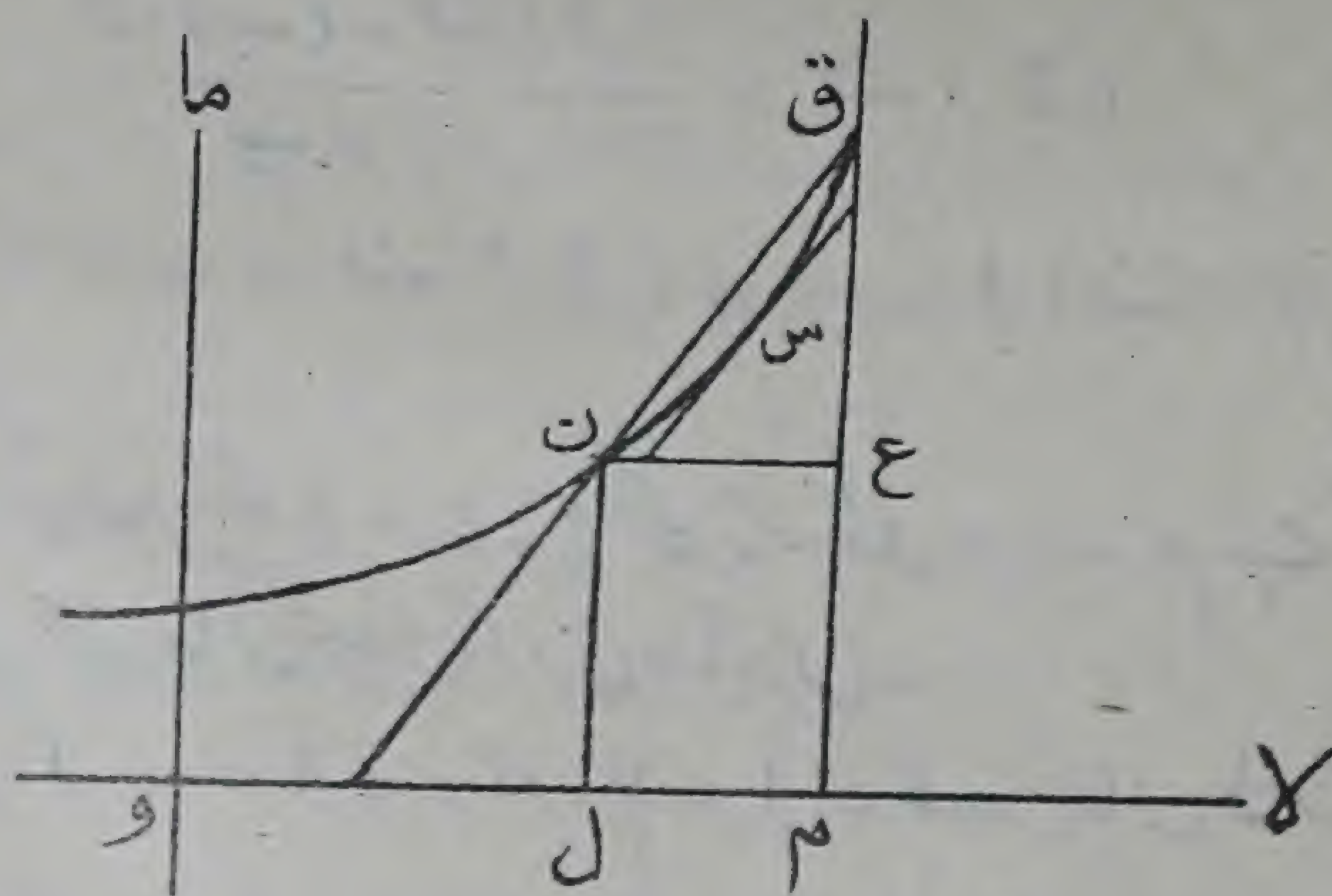
پس فَ (لاٖ) = صفر

رول کے مسئلہ کا نتیجۂ صریح :—

اگر ف (ا) = ف (ب) = مستقل م تو فَ (لا) متغیر لا کی کم از کم ایک قیمت کے لیے جو ا اور ب کے درمیان واقع ہے صفر ہوگا۔ اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ف (لا) - م پر غور کرو۔ یہ تفاعل رول کے مسئلہ کی شرائط کو پورا کرتا ہے اس لیے فَ (لاٖ) صفر ہوگا جہاں ا < لاٖ < ب۔

۲ ۶ ۔ اوسط قیمت کا مسئلہ :— رول کے مسئلہ سے ایک اہم مسئلہ اخذ کیا جاتا ہے جس کو اوسط قیمت کے مسئلہ سے نامزد کرتے ہیں۔ یہ مسئلہ ہے کہ اگر ف (لا) اور فَ (لا) مسلسل ہوں جبکہ ا < لا < ب تو ف (ب) - ف (ا) = (ب - ا) فَ (لاٖ) جہاں ا < لاٖ < ب

ہندسی شکل سے ظاہر ہے کہ ما = ف (لا) کی ترسیم پر دو نقاط ن اور ق لیں جن کے محدد ہیں [ا، ف (ا)] اور [ب، ف (ب)] تو

$$\frac{\text{ف (ب) - ف (ا)}}{\text{ب - ا}} = \frac{\text{ق م - ن ل}}{\text{م و - ل و}} = \frac{\text{ق ع}}{\text{ن ع}} = \text{مس}\ (\text{ق}\hat{\text{ن}}\text{ع})$$

پس ہندسی الفاظ میں مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ وتر ن ق قوس کے کسی درمیانی نقطہ پر مماس کے متوازی ہے۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے تفاعل فا (لا) پر غور کرو جہاں

فا (لا) = ف (لا) ۔ ف (ا) ۔ {(ف (ب) ۔ ف (ا)) / (ب ۔ ا)} (لا ۔ ا)

تفاعل فا (لا) حدود ا اور ب کے درمیان مسلسل ہے اور اس کا تفرقی سر بھی مسلسل ہے۔

نیز ظاہر ہے کہ فا (ا) = ف (ا) ۔ ف (ا) ۔ {(ف (ب) ۔ ف (ا)) / (ب ۔ ا)} (ا ۔ ا) = صفر

اور فا (ب) = ف (ب) ۔ ف (ا) ۔ {(ف (ب) ۔ ف (ا)) / (ب ۔ ا)} (ب ۔ ا) = صفر

اس لیے تفاعل فا (لا) پر مسئلہ رول لگانے سے حاصل ہوتا ہے کہ

فاَ (لا۱) = ۰ جہاں لا۱ وقفہ (ا ب) میں مناسب نقطہ ہے۔

اب فاَ (لا) = فَ (لا) ۔ (ف (ب) ۔ ف (ا)) / (ب ۔ ا)

∴ فاَ (لا۱) = فَ (لا۱) ۔ (ف (ب) ۔ ف (ا)) / (ب ۔ ا) = صفر

∴ (ف (ب) ۔ ف (ا)) / (ب ۔ ا) = فَ (لا۱)

یعنی ف (ب) ۔ ف (ا) = (ب ۔ ا) فَ (لا۱) اور مسئلہ ثابت ہوا۔

نتیجۂ صحیح (۱)۔ چونکہ یہ مسئلہ بہت اہم ہے اس کی دو ذرا مختلف شکلیں بھی یہاں بیان کر دی جاتی ہیں۔

فرض کرو کہ ب = ا + ھ اور لا۱ = ا + طھ جہاں ط مناسب مثبت کسرِ واجب ہے

تو ف (ا + ھ) = ف (ا) + ھ فَ (ا + طہ ھ)

نتیجۂ صریح (۲)۔ نیز اگر ا کی بجائے لا لکھیں اور ب کی بجائے لا + Δ لا

تو ف (لا + Δ لا) ۔ ف (لا) = Δ لا × فَ (لا + طہ × Δ لا)

مثال (۱) اگر ف (لا) = لا³ ۔ ۴ لا تو ف (لا) = ۰ اور فَ (لا) = ۰ سے لا کی قیمتیں نکال کر رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو۔

ف (لا) = لا³ ۔ ۴ لا = لا (لا² ۔ ۴) = لا (لا ۔ ۲) (لا + ۲)

∴ ف (لا) = ۰ جبکہ لا = ۲، ۰، ۔۲

اور فَ (لا) = ۳ لا² ۔ ۴ = ۰ جبکہ لا = ± $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$

چونکہ $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ نقاط ۲ اور صفر کے درمیان اور ۔ $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ نقاط صفر اور ۔۲ کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے رول کے مسئلہ کی تصدیق ہوتی ہے۔

(۲) لا کی وہ قیمتیں دریافت کرو جو ف (لا) = ۰ اور فَ (لا) = ۰ کو پورا کرتی ہیں اور اس سے رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو۔

(ا) ف (لا) = لا³ ۔ ۳ لا

(ب) ف (لا) = ۶ لا² ۔ لا³

(ج) ف (لا) = ا + ب لا + ج لا²

(د) ف (لا) = جب π لا ۔ جم π لا

(ھ) ف (لا) = لا لوگ لا

(۳) بتاؤ کہ ذیل کے تفاعلوں پر رول کا مسئلہ استعمال ہو سکتا ہے یا نہیں۔ اپنے جواب کی وجہ بیان کرو۔

(ا) ف (لا) = مس لا اور لا = صفر اور π

(ب) (ما + ۱)³ = لا² میں ما = صفر جبکہ لا = + ۱، ۔ ۱

(۴) اگر ف (لا) = لا² تو بتاؤ کہ لا = ۱ اور لا = ۲ کے درمیان کسی نقطہ پر مماس وتر کے متوازی ہے

اب ف (ب) ۔ ف (ا) = (ب ۔ ا) فَ (لا₁)

$$\therefore\ \text{فَ}(\text{لاٖ}) = \frac{\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا})}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ف}(۲) - \text{ف}(۱)}{۲ - ۱} = \frac{۴ - ۱}{۱} = ۳$$

$$\therefore\ ۲\,\text{لاٖ} = ۳ \quad \therefore\ \text{لاٖ} = \frac{۳}{۲}$$

(۵) ذیل کے تفاعلوں میں لاٖ کی قیمت معلوم کرو جو رشتہ ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (لاٖ) کو پورا کرے اور تصدیق کرو کہ لاٖ، ا اور ب کے درمیان واقع ہے۔

(ا) $\text{ف}(\text{لا}) = \frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$ ب = ۲، $\text{ا} = \frac{۳}{۲}$

(ب) $\text{ف}(\text{لا}) = \sqrt{\text{لا}}$ $\text{ا} = ۲\frac{۱}{۴}$ اور $\text{ب} = \frac{۹}{۱۶}$ ؛

(ج) $\text{ف}(\text{لا}) = \text{و}^{\text{لا}}$ ا = ۰ اور ب = ۱

(د) ف (لا) = لوگ (۱ + لا) ا = ۰ اور $\text{ب} = \frac{۱}{۲}$

(۶) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}^{۳}$ اور ا = ۴ اور ھ = ۱ تو اوسط مسئلہ میں ط کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{ف}(\text{ا} + \text{ھ}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{ھ}\,\text{فَ}(\text{ا} + \text{ط}\,\text{ھ})$$

$$\therefore\ (۴ + ۱)^{۲} = ۴^{۳} + ۱ \times \left[۳(۴ + \text{ط} \times ۱)^{۲}\right]$$

$$\therefore\ ۱۲۵ = ۶۴ + ۳(۴ + \text{ط})^{۲}$$

$$\therefore\ (۴ + \text{ط})^{۲} = \frac{۶۱}{۳}$$

$$\text{یا}\quad \text{ط} = \sqrt{\frac{۶۱}{۳}} - ۴ = ۴٫۵۰۹۲۵ - ۴ = ۰٫۵۰۹۲۵$$

ط کی قیمت سے اس امر کی تصدیق ہوتی ہے کہ ط کسر واجب ہے۔

(۷) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = ۳\,\text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} + ۵$ تو ط کی قیمت معلوم کرو جبکہ

(۱) ا = ۶ اور ھ = ۱

(۲) ا = ۱۲ اور ھ = ۴

(۸) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = ۲\,\text{لا}^{۳} - ۵$ تو ط کی قیمت معلوم کرو جبکہ

(۱) ا = ۲ اور ھ = $\frac{1}{2}$

(۲) ا = ۸ اور ھ = ۱

۶۳ ۔ اوسط مسئلہ کی توسیع

:۔ دفعۂ ماقبل میں دیے ہوئے اوسط کے مسئلہ کی توسیع ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ف (لا) کا دوسرا مشتق وجود رکھتا ہے اور مسلسل ہے تو سابقہ ترقیم کے مطابق فرض کرو کہ

$$\text{فا(لا)} = \text{ف(لا)} - \text{ف(ا)} - (\text{لا} - \text{ا})\,\text{فَ(ا)} - \frac{1}{2}(\text{لا} - \text{ا})^2 \times \frac{\text{ف(ب)} - \text{ف(ا)} - (\text{ب} - \text{ا})\,\text{فَ(ا)}}{\frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ا})^2}$$

اب تفاعل فا (لا) حدود ا اور ب کے درمیان مسلسل ہے اور اس کا تفرقی سر بھی مسلسل ہے اور واضح ہے کہ فا (ا) = فا (ب) = ۰ اس لیے ضروری ہے کہ مسئلہ رول سے فاَ (لا۱) = ۰ جہاں

$$\text{ا} < \text{لا}_1 < \text{ب}،\ \text{اب فاَ(لا)} = \text{فَ(لا)} - \text{فَ(ا)} - (\text{لا} - \text{ا}) \times \frac{\text{ف(ب)} - \text{ف(ا)} - (\text{ب} - \text{ا})\,\text{فَ(ا)}}{\frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ا})^2}$$

اس میں لا = ا درج کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ فاَ (ا) = ۰ ۔ اس لیے تفاعل فاَ (لا) پر بھی مسئلہ رول لگ سکتا ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فاً(لا}_2) = 0 \quad \text{جہاں}\ \text{ا} < \text{لا}_2 < \text{لا}_1 < \text{ب}\quad \text{فاً(لا)} = \text{فً(لا)} - \frac{\text{ف(ب)} - \text{ف(ا)} - (\text{ب} - \text{ا})\,\text{فَ(ا)}}{\frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ا})^2}$$

$$\text{اس لیے}\quad \text{فاً(لا}_2) = 0 = \text{فً(لا}_2) - \frac{\text{ف(ب)} - \text{ف(ا)} - (\text{ب} - \text{ا})\,\text{فَ(ا)}}{\frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ا})^2}$$

سادہ کرنے سے

$$0 = \frac{1}{2}(\text{ب} - \text{ا})^2\,\text{فً(لا}_2) - \left[\text{ف(ب)} - \text{ف(ا)} - (\text{ب} - \text{ا})\,\text{فَ(ا)}\right]$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ف(ب)} = \text{ف(ا)} + (\text{ب} - \text{ا})\,\text{فَ(ا)} + \frac{1}{2!}(\text{ب} - \text{ا})^2\,\text{فً(لا}_2)$$

یہ اوسط مسئلہ کی دوسرے مشتق تک توسیع ہے۔ اگر ف (لا) کا ن واں مشتق مسلسل ہو تو اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$ف(ب) = ف(ا) + (ب-ا)ف'(ا) + \frac{(ب-ا)^2}{\underline{|2}}ف''(ا) + \frac{(ب-ا)^3}{\underline{|3}}ف'''(ا) + \dots + \frac{(ب-ا)^{ن-1}}{\underline{|ن-1}}ف^{(ن-1)}(لا) + \frac{(ب-ا)^{ن}}{\underline{|ن}}ف^{(ن)}(لا_ن)$$

جہاں $ا < لا_ن < لا_{ن-1} < لا_{ن-2} < \dots < لا_2 < لا_1 < ب$

یہ اوسط کا توسیع شدہ مسئلہ کہلاتا ہے۔

اس میں $ب = لا + ا$ درج کریں تو

$$ف(ا+لا) = ف(ا) + لاف'(ا) + \frac{لا^2}{\underline{|2}}ف''(ا) + \dots + \frac{لا^{ن-1}}{\underline{|ن-1}}ف^{(ن-1)}(ا) + \frac{لا^{ن}}{\underline{|ن}}ف^{(ن)}(ا + طہ\,لا)$$

جہاں طہ کسر واجب ہے

یہ ٹیلر کا مسئلہ کہلاتا ہے کیونکہ ڈاکٹر برک ٹیلر (۱۶۸۵ء تا ۱۷۳۱ء) نے اس مسئلہ کو اپنی کتاب (Methodus Incrementorum) میں ۱۷۱۵ء میں شایع کیا تھا۔

اب لاتناہی سلسلہ $ف(ا) + لاف'(ا) + \frac{لا^2}{\underline{|2}}ف''(ا) + \dots + \frac{لا^{ن}}{\underline{|ن}}ف^{(ن)}(ا) + \dots$ پر غور کرو۔ پہلے باب میں بتایا گیا ہے کہ سلسلہ کے استدقاق کے لیے ضروری ہے کہ ن ویں رقم صفر کی طرف مائل ہو جبکہ $ن \to \infty$ لیکن یہ شرط کافی نہیں ہے۔ کافی شرط یہ ہے کہ ن رقموں کے بعد کی تمام رقموں کا مجموعہ صفر کی طرف مائل ہو جبکہ $ن \to \infty$، ن رقموں کے بعد کی تمام رقموں کے مجموعے کو باقی کہتے ہیں۔ مقابلہ سے ظاہر ہے یہ ٹیلر کے پھیلاؤ میں $\frac{لا^{ن}}{\underline{|ن}}ف^{(ن)}(ا + طہ\,لا)$ باقی ہے، اور اگر یہ صفر کی طرف مائل ہو جبکہ $ن \to \infty$ تو لاانتہا سلسلہ مستدق ہے اور اس لیے تفاعل کو لاتناہی سلسلے میں پھیلایا جا سکتا ہے۔

پس $ف(ا+لا) = ف(ا) + لاف'(ا) + \dots + \frac{لا^{ن}}{\underline{|ن}}ف^{(ن)}(ا) + \dots$

اس کو ٹیلر کا پھیلاؤ کہتے ہیں اور یہ صرف ایسے تفاعلوں کے لیے درست ہے

جن کے لیے $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}\,(\text{ا} + \text{لاطہ}) \rightarrow \text{صفر}$ جبکہ $\text{ن} \rightarrow \infty$، علم احصا میں یہ مسئلہ بہت اہم ہے اور اس لیے باقی پر اعلیٰ ریاضی دانوں نے غور کیا ہے اور اس کی دو خاص شکلیں لگرانج اور کوشی نے حاصل کی ہیں۔ اس کتاب میں صرف ایسے تفاعلوں کے پھیلاؤ پر غور کیا جائیگا جن کے لیے باقی صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔

ائیلر کے پھیلاؤ میں ا = ۰ رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(۰) + \text{لا}\,\text{فَ}(۰) + \cdots + \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(۰) + \cdots$$

بشرطیکہ $\frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\lfloor\text{ن}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لاطہ}) \rightarrow ۰$ جبکہ $\text{ن} \rightarrow \infty$

یہ پھیلاؤ سٹرلنگ (۱۶۹۲ء - ۱۷۷۰ء) نے حاصل کیا تھا لیکن اس نے شایع نہیں کیا۔ کولن میکلورن (۱۶۹۸ء - ۱۷۴۶ء) نے سب سے پہلے اِسے اپنی کتاب (Treatise on Fluxions) میں ۱۷۴۲ء میں شایع کیا اور اس لیے یہ پھیلاؤ میکلورن کا پھیلاؤ کہلاتا ہے۔

مثال (۱) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}^۳ - ۴\,\text{لا}^۲ + ۵\,\text{لا} + ۷$

تو ائیلر کے مسئلہ کی مدد سے ف (لا + ۲) معلوم کرو۔

$$\text{ف}(۲+\text{لا}) = \text{ف}(۲) + \text{لا}\,\text{فَ}(۲) + \frac{\text{لا}^۲}{\lfloor ۲}\,\text{فً}(۲) + \frac{\text{لا}^۳}{\lfloor ۳}\,\text{ف}'''(۲) + \cdots$$

اب $\text{ف}(۲) = ۲^۳ - ۴ \times ۲^۲ + ۵ \times ۲ + ۷ = ۹$

$\text{فَ}(\text{لا}) = ۳\,\text{لا}^۲ - ۸\,\text{لا} + ۵$

$\therefore\ \text{فَ}(۲) = ۳ \times ۲^۲ - ۸ \times ۲ + ۵ = ۱$

اور $\text{فً}(\text{لا}) = ۶\,\text{لا} - ۸$　　$\therefore\ \text{فً}(۲) = ۱۲ - ۸ = ۴$

اور $\text{ف}'''(\text{لا}) = ۶$　　$\therefore\ \text{ف}'''(۲) = ۶$

اور $\text{ف}''''(\text{لا}) = \text{صفر}$　　$\therefore\ \text{ف}''''(۲) = \text{صفر}$

اور ظاہر ہے کہ چوتھے سے اعلیٰ رتبہ کے تمام مشتق صفر ہیں

اس لیے
$$\text{ف}(۲+\text{لا}) = ۹ + \text{لا}\times ۱ + \frac{\text{لا}^{۲}}{۲!}(۴) + \frac{\text{لا}^{۳}}{۳!}(۶) + \frac{\text{لا}^{۴}}{۴!}(۰) + \dots$$
$$= ۹ + \text{لا} + ۲\,\text{لا}^{۲} + \text{لا}^{۳}$$

(۲) $\text{و}^{\text{لا}}$ کو (لا - ۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$$\text{ف}(۱+\text{لا}-۱) = \text{و}^{۱+(\text{لا}-۱)}$$
$$= \text{ف}(۱) + (\text{لا}-۱)\,\text{ف}'(۱) + \frac{(\text{لا}-۱)^{۲}}{۲!}\text{ف}''(۱) + \dots$$

اب $\text{ف}(\text{لا}) = \text{و}^{\text{لا}} = \text{ف}'(\text{لا}) = \text{ف}''(\text{لا}) = \dots\dots$

$$\therefore\ \text{ف}(۱) = \text{ف}'(۱) = \text{ف}''(۱) = \dots\dots = \text{و}^{۱}$$
$$\therefore\ \text{و}^{\text{لا}} = \text{و} + (\text{لا}-۱)\,\text{و} + \frac{(\text{لا}-۱)^{۲}}{۲!}\text{و} + \dots\dots$$
$$= \text{و}\left[۱ + (\text{لا}-۱) + \frac{(\text{لا}-۱)^{۲}}{۲!} + \frac{(\text{لا}-۱)^{۳}}{۳!} + \dots\dots\right]$$

باقی $= \frac{(\text{لا}-۱)^{\text{ن}}}{\text{ن}!}\,\text{و}^{۱+\text{ط}(\text{لا}-۱)}$ اور یہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے صفر کی طرف مائل ہوتا ہے چونکہ $\text{ن}!$ نسب نما میں ہے اس لیے پھیلاؤ درست ہے۔

(۳) $۳\,\text{لا}^{۳} - ۵\,\text{لا}^{۲} + ۸\,\text{لا} - ۵$ کو (لا - ۲) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۴) لوگ (ھ + لا) کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ اور پھر ھ = ۱ رکھ کر لوگ (۱ + لا) کا پھیلاؤ حاصل کرو۔

(۵) اگر $\text{ف}(\text{لا}) = ۵\,\text{لا}^{۳} - ۴\,\text{لا}^{۲} + ۱۸\,\text{لا} - ۷$، تو ف (لا - ۲) کی قیمت معلوم کرو۔

(۶) ف (لا + ۳) معلوم کرو جبکہ $\text{ف}(\text{لا}) = \text{لا}^{۳} - ۴\,\text{لا} + ۷$

(۷) لوگ لا کو (لا - ۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۸) جب (لا + ما) کو ما کی قوتوں میں پھیلاؤ اور اس میں لا = صفر اور لا = $\frac{۲۲}{۲}$ رکھ کر جب لا، جم لا کا پھیلاؤ حاصل کرو۔ ان پھیلاؤ سے تصدیق کرو کہ جب (لا + ما) = جب لا جم ما + جم لا جب ما

(۹) $\frac{۱}{\text{لا}}$ کو (لا - ۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۱۰) $و^{لا + ھ}$ اور $(لا + ھ)^{م}$ کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۱۱) جب لا کو میکلورن کے مسئلہ سے پھیلاؤ۔

$$جب\ لا = ف(لا) = ف(۰) + لا ف'(۰) + \frac{لا^{۲}}{۲!} ف''(۰) + \cdots + \frac{لا^{ن}}{ن!} ف^{(ن)}(ط لا)$$

$$اب\ ف'(لا) = جم\ لا = جب\left(لا + \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$اور\ ف''(لا) = جم\left(لا + \frac{\pi}{۲}\right) = جب\left(لا + ۲ \times \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$\cdots\ ف^{(ن)}(لا) = جب\left(لا + ن \times \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$\therefore\ جب\ لا = ۰ + لا \times جب\frac{\pi}{۲} + \frac{لا^{۲}}{۲!} \times جب\frac{۲\pi}{۲}$$

$$+ \frac{لا^{۳}}{۳!} \times جب\frac{۳\pi}{۲} + \cdots + \frac{لا^{ن}}{ن!} جب\left(ط لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$$

اب $\frac{لا^{ن}}{ن!} جب\left(ط لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$ پر غور کرو جب $\left(ط لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$ تمام قیمتوں کے لیے ایک سے کم ہے اور $لا^{ن}$ اور $ن!$ دونوں لاتناہی کی طرف مائل ہیں اگر $ن \to \infty$ لیکن طالب علم یہ مان لے کہ $ن!$ بمقابلہ $لا^{ن}$ بہت بڑا لاتناہی ہے اس لیے $\frac{لا^{ن}}{ن!} \to$ صفر جبکہ $ن \to \infty$ متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے

$$پس\quad جب\ لا = لا - \frac{لا^{۳}}{۳!} + \frac{لا^{۵}}{۵!} - \frac{لا^{۷}}{۷!} + \cdots\cdots$$

(۱۲) ذیل کے تفاعلوں کو میکلورن کے مسئلہ سے پھیلاؤ

(ا) $و^{لا}$	(ب) لوک $(۱ + لا)$
(ج) $جب^{-۱}\ لا$	(د) $مس^{-۱}\ لا$
(ھ) جم لا	(و) مس لا
(ز) قط لا	

(۱۳) ثابت کرو کہ $و^{جب^{-۱} لا} = ۱ + لا + \frac{لا^{۲}}{۲!} + \frac{۲ لا^{۳}}{۳!} + \frac{۵ لا^{۴}}{۴!} + \cdots\cdots$

(۱۴) $\text{لوک}\,(1 - \text{لا} + \text{لا}^2) = -\text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{2\text{لا}^3}{3} + \frac{\text{لا}^4}{4} - \frac{\text{لا}^5}{5} \ldots\ldots$

(۱۵) $\text{ھو}^{\text{لا}}\,\text{جب}\,\text{لا} = \text{لا} + \text{لا}^2 + \frac{2\,\text{لا}^3}{\underline{|3}} - \frac{2^2\,\text{لا}^5}{\underline{|5}} - \frac{2^3\,\text{لا}^6}{\underline{|6}} - \frac{2^3\,\text{لا}^7}{\underline{|7}} \ldots\ldots$

(۱۶) $\text{ھو}^{\text{لا جم ع}}\,\text{جم}\,(\text{لا جب ع}) = 1 + \text{لا جم ع} + \frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}}\,\text{جم}\,2\text{ع} + \frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}}\,\text{جم}\,3\text{ع} + \ldots$

۶۴- ائیلر کے پھیلاؤ کی مدد سے اعظم اور اقل قیمتوں کا مسئلہ :-

تفاعل ف (لا) کو کسی نقطہ لا = ا پر اعظم اس وقت کہتے ہیں جبکہ اس نقطہ پر تفاعل کی قیمت دونوں جانب قریب کے نقطوں پر کی قیمت سے زیادہ ہو یا تحلیلی زبان میں اسے یوں بیان کرینگے کہ

$\text{ف}\,(\text{ا}) - \text{ف}\,(\text{ا} + \text{ھ}) > 0$

اور $\text{ف}\,(\text{ا}) - \text{ف}\,(\text{ا} - \text{ھ}) > 0$ جبکہ ھ کوئی کافی چھوٹی مقدار ہے

اسی طرح تفاعل ف (لا) کو لا = ا پر اقل کہینگے بشرطیکہ

$\text{ف}\,(\text{ا}) - \text{ف}\,(\text{ا} + \text{ھ}) < 0$

$\text{ف}\,(\text{ا}) - \text{ف}\,(\text{ا} - \text{ھ}) < 0$ جبکہ ھ کافی چھوٹی مقدار ہے

اب $\text{ف}\,(\text{ا} + \text{ھ}) = \text{ف}\,(\text{ا}) + \text{ھ}\,\text{ف}'\,(\text{ا}) + \frac{\text{ھ}^2}{\underline{|2}}\,\text{ف}''\,(\text{ا}) + \ldots\ldots$

$+ \frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}\,(\text{ا} + \text{ط}\,\text{ھ})$

اس لیے $\text{ف}\,(\text{ا}) - \text{ف}\,(\text{ا} + \text{ھ}) = -\text{ھ}\,\text{ف}'\,(\text{ا}) - \frac{\text{ھ}^2}{\underline{|2}}\,\text{ف}''\,(\text{ا}) - \ldots\ldots$

$- \frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}\,(\text{ا} + \text{ط}\,\text{ھ}) \quad \ldots (1)$

اس میں ھ کی علامت بدلنے سے

$\text{ف}\,(\text{ا}) - \text{ف}\,(\text{ا} - \text{ھ}) = \text{ھ}\,\text{ف}'\,(\text{ا}) - \frac{\text{ھ}^2}{\underline{|2}}\,\text{ف}''\,(\text{ا}) \ldots\ldots$

$+ (-1)^{\text{ن}}\,\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}\,(\text{ا} + \text{ط}\,\text{ھ}) \quad \ldots (2)$

مساوات (۱) اور (۲) کی بائیں جانب کے جملوں کی قیمت ھ کو کافی چھوٹا لینے سے پہلی رقم پر منحصر کی جا سکتی ہے۔ اب اعظم اور اقل نقطوں کے لیے ضروری ہے کہ ف (ا) ـ ف (ا + ھ) اور ف (ا) ـ ف (ا ـ ھ) کی علامت ایک ہی ہو اعظم نقطوں کے لیے مثبت اور اقل نقطوں کے لیے منفی۔ اس لیے ضروری ہے کہ مساوات (۱) اور (۲) کے بائیں جانب کی پہلی رقم صفر ہو کیونکہ یہ مختلف العلامت ہے۔ یعنی اعظم اور اقل نقطوں کے لیے ضروری شرط ہے کہ فَ (ا) = ۰

اب ف (ا) ـ ف (ا + ھ) = ـ $\frac{ھ^{2}}{2!}$ فً (ا) .....

اور ف (ا) ـ ف (ا ـ ھ) = ـ $\frac{ھ^{2}}{2!}$ فً (ا) .....

ان مساواتوں میں بائیں جانب کی علامت ایک ہی ہے اعظم نقطوں کے لیے

ـ $\frac{ھ^{2}}{2!}$ فً (ا) کو مثبت ہونا چاہیے یعنی فً (ا) کو منفی ہونا چاہیے۔

اور اقل نقطوں کے لیے فً (ا) کو مثبت ہونا چاہیے۔ اگر فً (ا) بھی صفر ہو تو اعظم اور اقل نقطوں کے لیے فًً (ا) کو بھی صفر ہونا چاہیے اور اعظم کے لیے فًًً (ا) منفی اور اقل کے لیے فًًً (ا) مثبت۔

پس عام صورت میں اگر

ف (ا) = فَ (ا) = ... $ف^{(ر)}$ (ا) = ۰ اور $ف^{(ر+1)}$ (ا) ≠ صفر

اور ر طاق ہو تو نقطہ لا = ا اعظم یا اقل ہوگا جبکہ $ف^{(ر+1)}$ (ا) ≷ صفر

لیکن اگر ر جفت ہو تو لا = ا نقطۂ انعطاف ہوگا۔

مثال (۱) ف (لا) = $قو^{لا}$ + ۲ جم لا + $قو^{-لا}$ کی اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کرو۔

فَ (لا) = $قو^{لا}$ ـ ۲ جب لا ـ $قو^{-لا}$ = صفر جبکہ لا = صفر

اور فً (لا) = $قو^{لا}$ ـ ۲ جم لا + $قو^{-لا}$ = ۱ ـ ۲ + ۱ = صفر

اور ف'' (لا) = قو^{لا} + ۲ جب لا - قو$^{-لا}$ = صفر جبکہ لا = صفر

اور ف''' (لا) = قو^{لا} + ۲ جم لا + قو$^{-لا}$ = ۴

اس لیے لا = صفر تفاعل ف (لا) کا اقل نقطہ ہے۔

(۲) ذیل کے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمت دریافت کرو:—

(ا) لا^{۳} - ۹ لا^{۲} + ۲۴ لا - ۷

(ب) لا^{۴} - ۴ لا^{۳} + ۵

(ج) لا^{۳} + ۳ لا^{۲} + ۳ لا

(د) لا^{۳} (لا - ۲)^{۲}

(ہ) جب لا (۱ + جم لا)

(و) $\frac{لا}{لوک\ لا}$

(ز) لوک جم لا

(ح) ۳ جب لا + ۲ جم ۲ لا

(ط) $\frac{لا}{۱ + لا\ مس\ لا}$

(ی) ۳ لا^{۵} - ۱۲۵ لا^{۳} + - ۲۱۶ لا

(ک) لا^{۴} + ۴

(ل) لا^{۵} = ۱

(م) لا^{لا}

(ن) جب^{۳} لا جم لا

(ص) (لا - ۲)^{۴} + ۱

۶۵- غیر معیّن شکلیں :—

پہلے باب میں بتایا گیا ہے کہ غیر معین شکل مثلاً $\frac{صفر}{صفر}$ کی قیمت کے کیا معنی ہیں۔ حسابی عمل کی حد تک $\frac{صفر}{صفر}$ کے کوئی معنی نہیں ہیں کیونکہ کسی ہندسہ کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا۔ غیر معین شکل کی قیمت سے دراصل انتہا مراد ہے یعنی اگر ف (ا) = فا (ا) =۔

تو ف (لا) / فا (لا) کی قیمت جبکہ لا = ل سے مراد ہے نہا (لا ← ل) ف (لا) / فا (لا) غیر معین شکلیں بہت قسم کی ہوتی ہیں لیکن ان میں سب سے اہم صفر/صفر والی شکل ہے اور ہم اسی پر سب سے پہلے غور کرینگے۔

۱۵ء۶ - صفر/صفر :- اگر ف (ل) = فا (ل) = ۰

تو نہا (لا ← ل) ف (لا) / فا (لا) کی قیمت مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ ھ بہت چھوٹی مقدار ہے تب ائیلر کے مسئلہ سے

ف (ل + ھ) = ف (ل) + ھ فَ (ل) + (ھ^۲ / ۲!) فً (ل + ط۱ ھ)

اور فا (ل + ھ) = فا (ل) + ھ فاَ (ل) + (ھ^۲ / ۲!) فاً (ل + ط۲ ھ)

اب

نہا (لا ← ل) ف (لا) / فا (لا) = نہا (ھ ← صفر) ف (ل + ھ) / فا (ل + ھ)

= نہا (ھ ← ۰) [ف (ل) + ھ فَ (ل) + (ھ^۲ / ۲!) فً (ل + ط۱ ھ)] / [فا (ل) + ھ فاَ (ل) + (ھ^۲ / ۲!) فاً (ل + ط۲ ھ)]

= نہا (ھ ← ۰) [ھ فَ (ل) + (ھ^۲ / ۲!) فً (ل + ط۱ ھ)] / [ھ فاَ (ل) + (ھ^۲ / ۲!) فاً (ل + ط۲ ھ)]

چونکہ ف (ل) = فا (ل) = ۰

اور چونکہ ھ ≠ صفر اس لیے ھ سے تقسیم کر سکتے ہیں

= نہا (ھ ← ۰) [فَ (ل) + (ھ / ۲) فً (ل + ط۱ ھ)] / [فاَ (ل) + (ھ / ۲) فاً (ل + ط۲ ھ)]

= فَ (ل) / فاَ (ل) بشرطیکہ فً (ل + ط۱ ھ)

اور $\text{فاً}(\text{ل} + \text{طہ}\,\text{ھ})$ محدود ہوں جو شرط اکثر سوالات میں پوری ہوتی ہے۔

اس لیے ثابت ہوا کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ل}} \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{فا}(\text{لا})} = \frac{\text{فً}(\text{ل})}{\text{فاً}(\text{ل})}$$

اگر $\text{فً}(\text{ل}) = \text{فاً}(\text{ل}) =$ صفر تو ٹیلر کے پھیلاؤ کو تیسرے تفرق تک لینے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to\text{ل}} \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{فا}(\text{لا})} = \frac{\text{فٌ}(\text{ل})}{\text{فاٌ}(\text{ل})}$$ وغیرہ، وغیرہ۔

یعنی شمارکنندہ اور نسب نما کو علحدہ علحدہ تفرق کر کے $\text{لا} = \text{ل}$ درج کرنے کے عمل کو اُس وقت تک جاری رکھا جائے جب تک ان میں سے کم از کم ایک تفاعل کے مشتق کی قیمت صفر نہ ہو۔

مثال (۱) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۲} \frac{\text{لا}^۲ - ۴}{\text{لا}^۲ + \text{لا} - ۶}$ کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{نہا}_{\text{لا}\to ۲} \frac{\text{لا}^۲ - ۴}{\text{لا}^۲ + \text{لا} - ۶} = \text{نہا}_{\text{لا}\to ۲} \frac{۲\,\text{لا}}{۲\,\text{لا} + ۱} = \frac{۴}{۵}$$

(۲) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{لا}^۳}{\text{جب لا} - \text{لا}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

اب $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{لا}^۳}{\text{جب لا} - \text{لا}} = \text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{۳\,\text{لا}^۲}{\text{جم لا} - ۱}$ یہ بھی $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ کی شکل ہے

$$\therefore = \text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{۶\,\text{لا}}{-\text{جب لا}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{۶}{-\text{جم لا}} = -۶$$

(۳) ذیل کی قیمتیں محسوب کرو:-

(ل) $\text{نہا}_{\text{لا} = \frac{۱}{۲}} \frac{۶\,\text{لا}^۲ - ۵\,\text{لا} + ۱}{۸\,\text{لا}^۲ - ۲\,\text{لا} - ۱}$

(ب) $\underset{\text{لا}\to\text{د}}{\text{نہا}}\ \frac{\text{لا} - \text{د}}{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{د}^{\text{ن}}}$

(ج) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{لا و}^{۳\text{لا}} - \text{لا}}{۱ - \text{جم } ۲\text{لا}}$

(د) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{(۲ - \text{لا}^{۲})\text{ جب لا} - ۲\text{ لا جم لا}}{\text{لا}^{۳}}$

(ہ) $\underset{\text{لا}\to ۲}{\text{نہا}}\ \frac{\sqrt{۱۶\text{لا} - \text{لا}^{۴}} - ۲ \times \sqrt[۳]{۴\text{لا}}}{۲ - \sqrt[۴]{۲\text{لا}^{۳}}}$

(و) $\underset{\text{ط}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{(۱ - \text{جم ط})^{۲}}{\text{ط}^{۴}}$

(ز) $\underset{\text{ط}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{جب}^{۳}\text{ ط}}{\text{ط}^{۳}}$

(ح) $\underset{\text{ط}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{مس ط} + \text{قط ط} - ۱}{\text{مس ط} - \text{قط ط} + ۱}$

(ط) $\underset{\text{ا}\to \frac{\pi}{۲}}{\text{نہا}}\ \frac{\text{لوک جب ا}}{(\pi - ۲\text{ا})^{۲}}$

(ی) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{ا}^{\text{لا}} - \text{ب}^{\text{لا}}}{\text{لا}}$

(ک) $\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}}\ \frac{(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{۳})^{۳}}{(\text{لا} - ۶)\text{و}^{\text{لا}} + \text{لا و}^{۳}}$

(ل) $\underset{\text{ط}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{مس ط} - \text{جب ط}}{\text{جب}^{۳}\text{ ط}}$

(م) $\underset{\text{ا}\to\text{د}}{\text{نہا}}\ \frac{\text{د ا} - \text{ا}^{۲}}{\text{د}^{۴} - ۲\text{د}^{۳}\text{ا} + ۲\text{د ا}^{۳} - \text{ا}^{۴}}$

(ن) $\underset{\text{ط}\to ۰}{\text{نہا}}\ \frac{\text{جب ط} - \text{ط}}{\text{مس ط} - \text{ط}}$

۶۵۲ ۔ لاتناہی / لاتناہی :۔ اگر لا ← ب کے لیے ف (لا) ← ∞ اور فا (لا) ← ∞ تو نہا لا ← ب ف (لا) / فا (لا) کی قیمت مطلوب ہے ۔ اس صورت میں بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ

نہا لا ← ب ف (لا) / فا (لا) = نہا لا ← ب فَ (لا) / فاَ (لا) لیکن اس کا صحیح ثبوت ذرا مشکل ہے اور اس کتاب میں نہیں دیا جائیگا ۔ اس مسئلہ کو صحیح مان کر سوالات میں استعمال کیا جا سکتا ہے ۔ بعض صورتوں میں لکھ سکتے ہیں کہ نہا لا ← ب ف (لا) / فا (لا)

= نہا لا ← ب (۱ / فا (لا)) / (۱ / ف (لا)) جو صفر / صفر والی غیر معین شکل ہے اور اس کی قیمت سابقہ دفعہ سے نکالی جا سکتی ہے ۔

غیر معین شکل لاتناہی × صفر اور لاتناہی ۔ لاتناہی کو مذکورہ بالا صفر / صفر یا لاتناہی / لاتناہی والی شکل میں بہ آسانی تبدیل کیا جا سکتا ہے جیساکہ مثالوں سے واضح ہوگا ۔ نیز غیر معین شکلیں (صفر)^صفر (لاتناہی)^صفر اور (۱)^لاتناہی لوکارتم لینے سے صفر × لاتناہی کی شکل میں تبدیل کی جا سکتی ہیں اور مثالوں سے ان کی قیمت نکالنے کا طریقہ واضح کیا جائیگا ۔

مثال (۱) نہا لا ← ۰ لوک لا / قم لا دریافت کرو ۔ یہ لاتناہی / لاتناہی کی غیر معین شکل ہے اور اسے صفر / صفر کی شکل میں آسانی سے بیان نہیں کیا جا سکتا ۔

نہا لا ← ۰ لوک لا / قم لا = نہا لا ← ۰ (۱ / لا) / (− قم لا جم لا) = نہا لا ← ۰ جب^۲ لا / (لا جم لا)

جو صفر / صفر والی غیر معین شکل ہے ۔ اس لیے نہا لا ← ۰ (۲ جب لا جم لا) / (جم لا − لا جب لا) = صفر

مثال (۲) $\text{نہا}_{\text{ط}\to ۰} \frac{\text{مم ط}}{\text{مم ۳ ط}}$ کی قیمت دریافت کرو۔ یہ $\frac{\text{لامتناہی}}{\text{لامتناہی}}$ کی غیر معین شکل ہے لیکن اس کو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والی شکل میں بہ آسانی تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

$$\text{نہا}_{\text{ط}\to ۰} \frac{\text{مم ط}}{\text{مم ۳ ط}} = \text{نہا}_{\text{ط}\to ۰} \frac{\text{مس ۳ ط}}{\text{مس ط}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{ط}\to ۰} \frac{\text{۳ قط}^۲\text{ ۳ ط}}{\text{قط}^۲\text{ ط}} = \frac{۳\times ۱}{۱} = ۳$$

ذیل کی قیمت محسوب کرو۔

(۳) $\text{نہا}_{\text{لا}\to \infty} \frac{\text{لا}^۳}{\text{ہو}^{\text{لا}}}$

(۴) $\text{نہا}_{\text{لا}\to \infty} \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}^{\text{ن}}}$　　(۵) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{مم لا}}{\text{لوک لا}}$

(۶) $\text{نہا}_{\text{ا}\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\text{مس ۳ ا}}{\text{مس ۵ ا}}$　　(۷) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{لوک لا}}{\text{مم لا}}$

(۸) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰}$ جب لا قم ۳ لا کی قیمت دریافت کرو۔ یہ صفر × لامتناہی کی شکل ہے۔

$\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰}$ جب لا قم ۳ لا $= \text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{جب لا}}{\text{جب ۳ لا}}$ جو $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ والی شکل ہے۔

$$= \text{نہا}_{\text{لا}\to ۰} \frac{\text{جم لا}}{\text{۳ جم لا}} = \frac{۱}{۳}$$

(۹) $\text{نہا}_{\text{ط}\to \frac{\pi}{۲}}$ (مس ط - قط ط) کی قیمت دریافت کرو۔ یہ $\infty - \infty$ کی غیر معین شکل ہے۔

$\text{نہا}_{\text{ط}\to \frac{\pi}{۲}}$ (مس ط - قط ط) $= \text{نہا}_{\text{ط}\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جب ط} - ۱}{\text{جم ط}}$ یہ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہے۔

= نہا (طہ ← π/۲) جم طہ / -جب طہ = ۰ / -۱ = صفر

ذیل کی قیمتیں محسوب کرو :-

(۱۰) نہا (لا ← ۲) (۲ - لا) مس (π لا / ۴)

(۱۱) نہا (لا ← ۱) [لوک (لا - ۱) + مس (π لا / ۲)] / مم π لا

(۱۲) نہا (لا ← π/۲) (۱ - جب لا) مس لا

(۱۳) نہا (لا ← ۰) قم^۲ لا - ۱/لا^۲

(۱۴) نہا (لا ← ∞) لا لوک (۱ + ۱/لا)

(۱۵) نہا (لا ← π/۲) (قط لا - ۱/(۱ - جب لا))

(۱۶) نہا (طہ ← ۰) [π/(۲ طہ) - π/(طہ (و^{π طہ} + ۱))]

(۱۷) نہا (لا ← ۰) لا^۲ لوک لا

(۱۸) نہا (ا ← ۲) [۴/(ا^۲ - ۴) - ۱/(ا - ۲)]

(۱۹) نہا (لا ← ۱) [۱/لوک لا - لا/لوک لا]

(۲۰) (۱ - لا)^{۱-لا} کی قیمت محسوب کرو جبکہ لا = ۱ یہ صفر^{صفر} والی غیر معین شکل اختیار کرتی ہے ۔

فرض کرو کہ ا = لا ← ۱ (۱ - لا)^{۱-لا}

لوکارتم لینے سے $\text{لوک ما} = \underset{\text{لا}\to\text{۱}}{\text{نہا}} (\text{۱} - \text{لا})\,\text{لوک}(\text{۱} - \text{لا})$ یہ صفر × لاتناہی والی شکل ہے

$$= \underset{\text{لا}\to\text{۱}}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک}(\text{۱}-\text{لا})}{\frac{\text{۱}}{\text{۱}-\text{لا}}}$$

$$= \underset{\text{لا}\to\text{۱}}{\text{نہا}} \frac{\frac{-\text{۱}}{\text{۱}-\text{لا}}}{\frac{\text{۱}}{(\text{۱}-\text{لا})^{\text{۲}}}} = \underset{\text{لا}\to\text{۱}}{\text{نہا}} -(\text{۱}-\text{لا})$$

$$= \text{صفر}$$

$$\therefore \text{ما} = \text{۱} = \underset{\text{لا}\to\text{۱}}{\text{نہا}} (\text{۱}-\text{لا})^{\text{۱}-\text{لا}}$$

(۲۱) $\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$ کی قیمت محسوب کرو:-

فرض کرو کہ $\text{لا} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$

تو $\text{لوک لا} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \text{ن}\,\text{لوک}\left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک}\left(\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)}{\frac{\text{۱}}{\text{ن}}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\frac{\text{۱}}{\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}} \times \left(-\frac{\text{۱}}{\text{ن}^{\text{۲}}}\right)}{-\frac{\text{۱}}{\text{ن}^{\text{۲}}}}$$

$$= \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{۱}}{\text{۱}+\frac{\text{۱}}{\text{ن}}} = \text{۱}$$

$$\therefore \text{لا} = \text{قو}^{\text{۱}} = \underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}} \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}$$

(۲۲) $\underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{نہا}} (\text{مس ط})^{\text{جم ط}}$ کی قیمت دریافت کرو:-

فرض کرو کہ $\text{ما} = \underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{نہا}} (\text{مس ط})^{\text{جم ط}}$

تو $\text{لوک ما} = \underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{نہا}}\ \text{جم ط} \times \text{لوک}(\text{مس ط}) = \underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک مس ط}}{\text{قط ط}}$

$$= \underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{نہا}} \frac{\frac{\text{۱}}{\text{مس ط}} \times \text{قط}^{\text{۲}}\,\text{ط}}{\text{قط ط مس ط}} = \underset{\text{ط}\to\frac{\pi}{\text{۲}}}{\text{نہا}} \frac{\text{قط ط}}{\text{مس}^{\text{۲}}\,\text{ط}}$$

$$= \underset{ط \to \frac{\pi}{۲}}{نہا} \frac{جم\ ط}{جب^{۲}\ ط} = صفر$$

$$\therefore\ ما = ۱ = \underset{ط \to \frac{\pi}{۲}}{نہا} (مس\ ط)^{جم\ ط}$$

(۲۳) $\underset{لا \to ۰}{نہا} (۱ + لا)^{\frac{۱}{لا}}$ (۲۴) $\underset{لا \to ۰}{نہا} (مم\ لا)^{جب\ لا}$

(۲۵) $\underset{ما \to ۱}{نہا} ما^{\frac{۱}{۱-ما}}$ (۲۶) $\underset{ط \to \frac{\pi}{۲}}{نہا} (جب\ ط)^{قط\ ط}$

(۲۷) $\underset{لا \to ۰}{نہا} (۱ + ۲\ لا)^{\frac{۱}{لا}}$ (۲۸) $\underset{لا \to ۰}{نہا} \left(\frac{۱}{لا}\right)^{جب\ لا}$

(۲۹) $\underset{لا \to ۱}{نہا} (۲ - لا)^{مس \frac{\pi لا}{۲}}$ (۳۰) $\underset{لا \to و}{نہا} (لوک\ لا)^{\frac{۱}{۱-لوک\ لا}}$

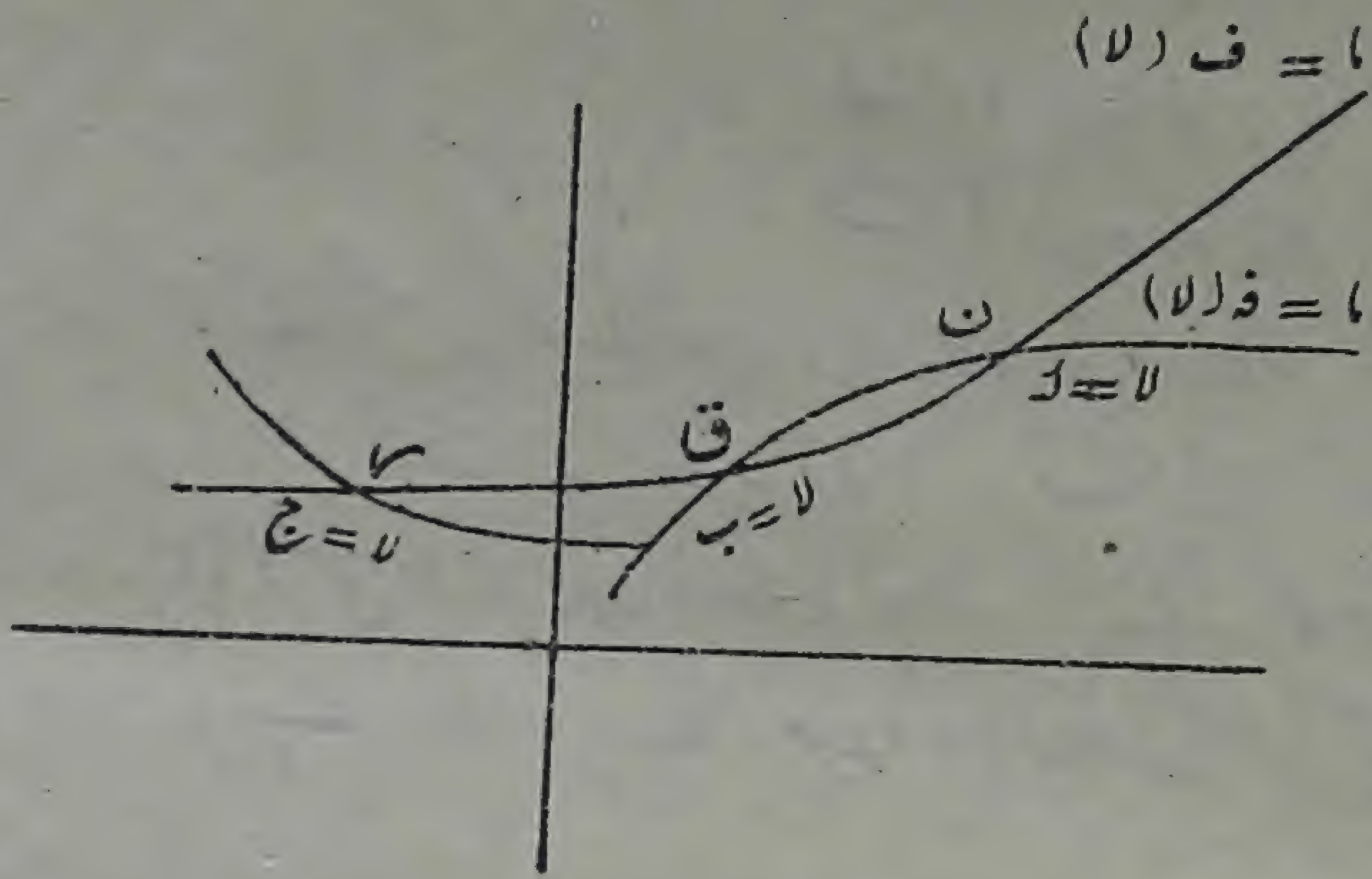
(۳۱) $\underset{لا \to ۰}{نہا} \frac{مس\ لا - جب\ لا}{لا^{۳}}$ (۳۲) $\underset{ط \to ۰}{نہا} (۱ + جب\ ط)^{مم\ ط}$

(۳۳) $\underset{ط \to ۰}{نہا} (جم\ م\ ط)^{\frac{ن}{ط^{۲}}}$

۶ ۶ ۔ تماس :۔ کسی منحنی کے مماس سے وہ خط مراد ہے جو منحنی کے دو نقطوں میں سے گذرے جبکہ انتہا میں نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں ۔ پس مماسی خط اور منحنی میں دو منطبق نقطے مشترک ہوتے ہیں اور خط کی اس حالت کو مس کرنا کہتے ہیں یا یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ خط، منحنی کے ساتھ پہلے رتبہ کا تماس رکھتا ہے ۔ اسی طرح اگر ایک منحنی دوسرے منحنی کو دو منطبق نقطوں پر کاٹے تو ایک منحنی دوسرے منحنی کو مس کریگا اور ان کے درمیان پہلے رتبہ کا تماس ہوگا ۔ اور اگر تین منطبق نقطوں پر کاٹے تو دوسرے رتبہ کا تماس ۔ پس اگر دو منحنی ایک دوسرے کو ن منطبق نقطوں پر کاٹیں تو (ن-۱) رتبہ کا تماس کہلاتا ہے ۔

فرض کرو کہ دو منحنی ما = ف (لا) اور ما = فہ (لا) ایک دوسرے کو دو نقطوں ن اور ق پر کاٹتے ہیں اور انتہا میں جب یہ نقطے منطبق

ہو جاتے ہیں، تو منحنیوں کا پہلے رُتبہ کا تماس ہوتا ہے۔

ا = ف (لا)
ا = فہ (لا)
ن
لا = ک
ق
سا
لا = ب
ا = ج

اب تفاعل فا (لا) = ف (لا) ۔ فہ (لا) پر غور کرو۔ نقطہ ن اور ق پر فا (لا) صفر ہے اور مسلسل ہے اس لیے رول کے مسئلہ سے فاَ (لا) نقاط ن اور ق کے درمیان کسی نقطہ پر صفر ہوگا۔ اب اگر نقطہ ق، ن پر منطبق ہو جائے تو فاَ (لا) کو بھی ن پر صفر ہونا پڑیگا۔

یعنی فاَ (ک) = ۰ = فَ (ک) ۔ فہَ (ک)

اس لیے پہلے رُتبہ کے تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ

ف (ک) = فہ (ک)
اور فَ (ک) = فہَ (ک)

اگر منحنی تین نقطوں ن، ق اور سا پر کاٹتے ہیں تو اوپر کی دلیل سے ظاہر ہے کہ

فاَ (لا$_1$) = فاَ (لا$_2$) = ۰ ۔ جہاں لا$_1$ نقاط ن اور ق کے درمیان ہے اور لا$_2$ نقاط ق اور سا کے درمیان ہے۔ اس پر مکرر رول کا مسئلہ استعمال کرنے سے

فاً (لا$_3$) = ۰ ۔ جہاں لا$_3$ نقاط لا$_1$ اور لا$_2$ کے درمیان ہے۔

اب اگر ن، ق، سا مل کر نقطہ ن پر اکٹھے ہو جائیں تو لا$_1$ اور لا$_2$ کو بھی ن پر واقع ہونا ضروری ہوگا اور اس لیے دوسرے رتبہ کے

تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ

$$\left.\begin{array}{l} \text{ف}(\text{ل}) = \text{فہ}(\text{ل}) \\ \text{ف}'(\text{ل}) = \text{فہ}'(\text{ل}) \\ \text{ف}''(\text{ل}) = \text{فہ}''(\text{ل}) \end{array}\right\}$$

اسی طرح ن ویں رتبہ کے تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ

$$\text{ف}(\text{ل}) = \text{فہ}(\text{ل})،\ \text{ف}'(\text{ل}) = \text{فہ}'(\text{ل})،\ \ldots\ \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{ل}) = \text{فہ}^{(\text{ن})}(\text{ل})$$

مثال (۱)۔ بتاؤ کہ منحنی ما = جب لا اور ما = لا ـ $\frac{\text{لا}^{۳}}{۶}$ کا مبدا پر کون سے رتبہ کا تماس ہے ۔ ظاہر ہے کہ مبدا پر دونوں منحنی ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں ۔

دونوں منحنیوں کے ڈھال بالترتیب جم لا اور ۱ ـ $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ ہیں جو مبدا پر مساوی ہیں ۔

دوسرے مشتق ہیں ـ جب لا اور ـ لا اور یہ بھی مساوی ہیں ۔
تیسرے مشتق ہیں ـ جم لا اور ـ ۱ اور یہ بھی مساوی ہیں ۔
چوتھے مشتق ہیں جب لا اور صفر اور یہ بھی مساوی ہیں ۔
پانچویں مشتق نامساوی ہیں ۔ اس لیے ان دونوں منحنیوں میں چوتھے رتبہ کا مبدا پر تماس ہے ۔

(۲) منحنیات ۱ ـ $\frac{\text{طہ}^{۲}}{۲}$ اور ۱ ـ $\frac{\text{طہ}^{۲}}{۲}$ + $\frac{\text{طہ}^{۴}}{۲۴}$ کا جم طہ سے تماس دریافت کرو ۔

(۳) منحنیات لا اور لا ـ $\frac{\text{لا}^{۳}}{۶}$ + $\frac{\text{لا}^{۵}}{۱۲۰}$ کا جب لا سے مبدا پر تماس دریافت کرو ۔

(۴) منحنیات $\frac{\text{لا}}{\text{و}^{\text{لا}} - ۱}$ اور $\frac{\text{لا}^{۲}}{۱۲}$ ـ $\frac{\text{لا}}{۲}$ + ۱ کا تماس دریافت کرو ۔

(۵) منحنیات مس (لا + $\frac{\text{ٹ}}{۴}$) اور (۲ لا^{۲} + ۲ لا + ۱) کی ترسیمیں کھینچو اور باہمی تماس دریافت کرو ۔

(۶) جم^{۲} لا اور ۱ ـ لا^{۲} کی ترسیمیں کھینچو اور باہمی تماس دریافت کرو ۔

(۷) ثابت کرو کہ دائرہ $لا^2 + ما^2 - ۴لا + ۷ما + ۱۲ = ۰$ نقطہ (۲، -۳) پر منحنی $ما = \frac{لا^3}{۶} - ۲لا - \frac{۱}{۳}$ سے دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔

۷ د ۶۔ **انحنا**:۔ منحنی کے گولائی پن کے ناپ کی بہت سی تعریفیں کی گئی ہیں ان میں سے دو تعریفیں اہم ہیں۔ ایک تعریف تو اس طرح کی جاتی ہے کہ منحنی کے تین متصل نقطوں میں سے ایک دائرہ کو گزارو۔ اب دائرہ کو ایسے بدلو کہ تین نقطوں میں سے دو نقطے منحنی پر حرکت کرتے ہوئے تیسرے نقطے پر منطبق ہو جائیں تو دائرہ کی ایک انتہائی وضع ہو گی۔ اس دائرہ سے اس نقطہ پر منحنی کی گولائی کا معیار مقرر کیا جاتا ہے اور اسے دائرۂ انحنا کہتے ہیں۔ اس کا نصف قطر (نق) کا نصف قطر انحنا کہلاتا ہے اور دائرہ کے مرکز کو مرکز انحنا کہتے ہیں۔ نیز $\frac{۱}{نصف قطر}$ کو منحنی کا انحنا کہتے ہیں۔ گزشتہ دفعہ سے ظاہر ہے کہ دائرہ اور منحنی میں دوسرے رتبہ کا تماس ہے۔ اس لیے بعض مصنف اس دائرہ کو لثمی دائرہ بھی کہتے ہیں۔ دوسرے رتبہ کے تماس کے لیے ضروری ہے کہ زیر غور نقطے پر منحنی اور دائرہ کے ڈھال اور دوسرے مشتق مساوی ہوں۔ ان شرائط سے دائرہ کی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔

۱ ۷ د ۶:۔ منحنی $ما = ف(لا)$ کے کسی نقطہ $(لا_1، ما_1)$ پر دائرۂ انحنا کی مساوات مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ دائرہ انحنا کی مساوات ہے

$(لا - عہ)^2 + (ما - بہ)^2 = ر^2$ اور اس لیے مرکز کے محدد (عہ، بہ)

ہونگے اور نصف قطر ر ہوگا۔ یہ تینوں چیزیں نامعلوم ہیں اور انہیں معلوم کرنے کے لیے تین مساوات درکار ہیں جو دوسرے رتبہ کے تماس کی تین شرائط سے حاصل ہوتی ہیں۔

پہلی شرط سے نقطہ $(لا_1، ما_1)$ دائرہ پر واقع ہے یعنی $(لا_1 - عہ)^2 + (ما_1 - بہ)^2 = ر^2$

دائرہ کی مساوات کو تفرق کرنے سے $(\text{لا} - \text{عہ}) + (\text{ما} - \text{بہ})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{ما} - \text{بہ}}$$

اور $$\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = -\frac{۱}{\text{ما} - \text{بہ}} + \frac{\text{لا} - \text{عہ}}{(\text{ما} - \text{بہ})^۲}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$$

$$= -\frac{۱}{\text{ما} - \text{بہ}} - \frac{۱}{(\text{ما} - \text{بہ})}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ = -\frac{۱}{(\text{ما} - \text{بہ})}\left[۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲\right]$$

اب تماس کی باقی دو شرطوں سے ظاہر ہے کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}$ کی قیمتیں اس نقطہ پر منحنی اور دائرہ کے لیے ایک ہی ہونی چاہییں۔ منحنی کے لیے ان کی قیمتیں معلوم ہیں اس لیے دائرہ کے لیے حاصل ہوگئیں۔ امتیاز کرنے کے لیے ان مشترک قیمتوں کو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}$ سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{لا} - \text{عہ}}{\text{ما} - \text{بہ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} = \frac{۱}{\text{ما} - \text{بہ}}\left[۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲\right]$$

$$\therefore \text{ما} - \text{بہ} = \frac{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲}{\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}} \quad \text{اور} \quad \text{لا} - \text{عہ} = -(\text{ما} - \text{بہ})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\left\{۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲\right\}}{\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}}$$

اب ر معلوم کرنے کے لیے ما - بہ اور لا - عہ کی یہ قیمتیں دائرہ کی مساوات میں درج کرو:

$$\text{ر}^۲ = (\text{لا} - \text{عہ})^۲ + (\text{ما} - \text{بہ})^۲$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲\left[۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲\right]^۲}{\left(\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}\right)^۲} + \frac{\left[۱ + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲\right]^۲}{\left(\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲}\right)^۲}$$

$$= \frac{\left[1+\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2\right]^3}{\left(\frac{\text{فر}^2\text{ ما}_1}{\text{فر لا}_1^2}\right)^2}$$

$$\therefore \text{ر} = \pm \frac{\left[1+\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^2\text{ ما}_1}{\text{فر لا}_1^2}}$$

اور مرکز کے محدد کے لیے

$$\text{ع} = \text{لا}_1 + \frac{\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\left[1+\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2\right]}{\frac{\text{فر}^2\text{ ما}_1}{\text{فر لا}_1^2}}$$

$$\text{اور ب} = \text{ما}_1 - \frac{1+\left(\frac{\text{فر ما}_1}{\text{فر لا}_1}\right)^2}{\frac{\text{فر}^2\text{ ما}_1}{\text{فر لا}_1^2}}$$

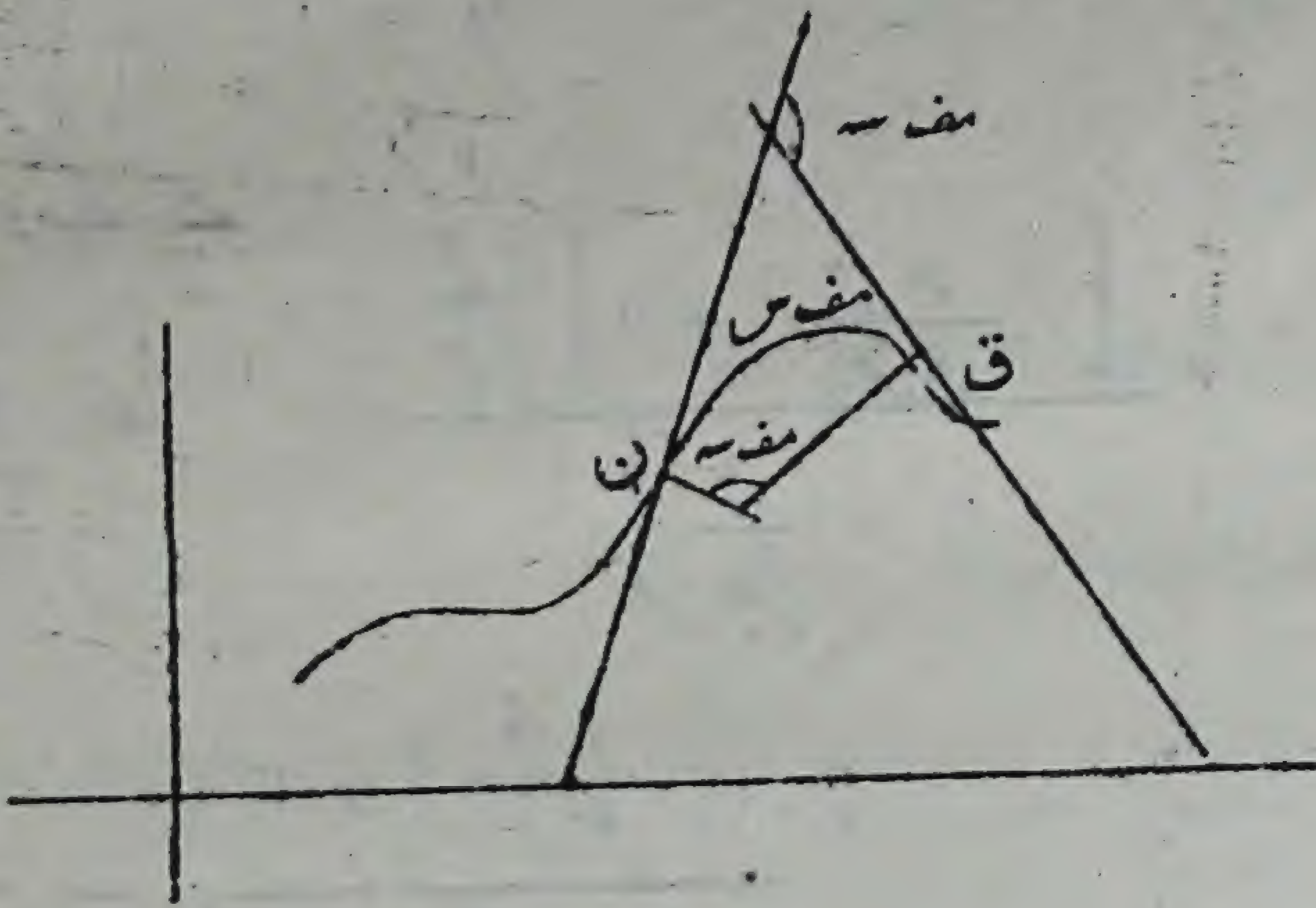
اگر منحنی پر کوئی نقطہ (لا$_1$، ما$_1$) کی بجائے (لا، ما) لیا جائے تو ان ضابطوں میں لاحقہ ۱ چھوڑ دیا جا سکتا ہے۔ پہلے ضابطہ میں علامت کا ابہام ہے اور اس کی وجہ یہ ہے کہ نصف قطر ایک طولی مقدار ہے اور اسے مثبت ہونا چاہیے لیکن اگر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو تو $\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}$ مثبت ہے اور نیچے کی طرف مقعر ہو تو $\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}$ منفی ہے

اس لیے اگر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہو تو

$$\text{ر} = \frac{\left[1+\left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}}$$

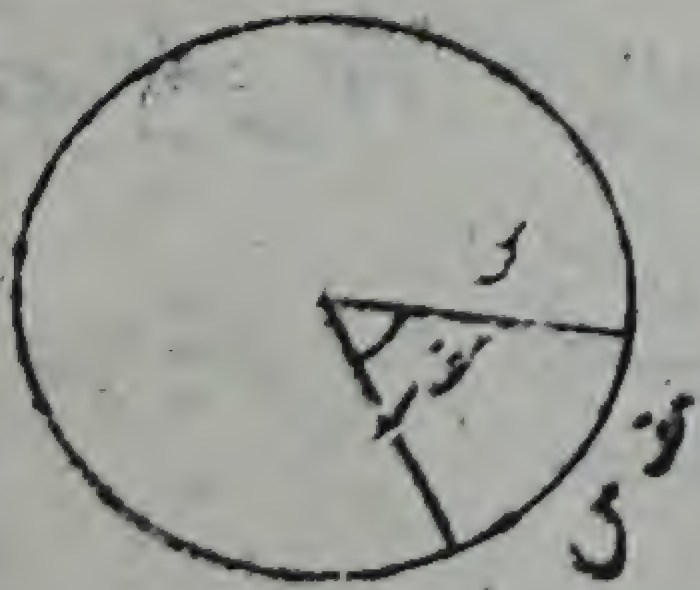
اور نیچے کی طرف مقعر ہو تو $ر = - \dfrac{\left[1 + \left(\dfrac{فر ما}{فر ما}\right)^{۲}\right]^{\frac{۳}{۲}}}{\dfrac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}}$

۶۷۸ - انحنا کی دوسری تعریف :-

فرض کرو کہ منحنی پر دو متصل نقطے ن اور ق ہیں اور ان کے درمیان

فاصلہ مف س ہے اور مماسوں یا عمادوں کے درمیان زاویہ مف سہ ہے۔
تو انحنا کی دوسری تعریف کے مطابق $\dfrac{مف سہ}{مف س}$ کی انتہا کو انحنا کہتے ہیں جبکہ ق نقطہ ن کے بے حد قریب آجائے۔

دائرہ کی صورت میں مف س = ل مف سہ

جہاں ل دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$\therefore$ نہا $\dfrac{مف سہ}{مف س} = \dfrac{فر سہ}{فر س} = \dfrac{۱}{ل}$

$\therefore$ $\dfrac{فر س}{فر سہ} = ل$ چونکہ دائرہ کی صورت میں $\dfrac{فر س}{فر سہ}$ دائرہ کے نصف قطر کے

برابر ہے اس لیے منحنی کی صورت میں بھی $\frac{\text{فرس}}{\text{فرسہ}}$ نصف قطر انحنا کہلاتا ہے ۔ اور منحنی کے عماد پر نصف قطر کی دوری والا نقطہ مرکز انحنا ۔ انحنا کی یہ تعریف بہت سادہ ہے اور اس سے تمام محدّدوں میں نصف قطر کے لیے جملہ آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں ۔ کارٹیزی محدّدوں میں ۔

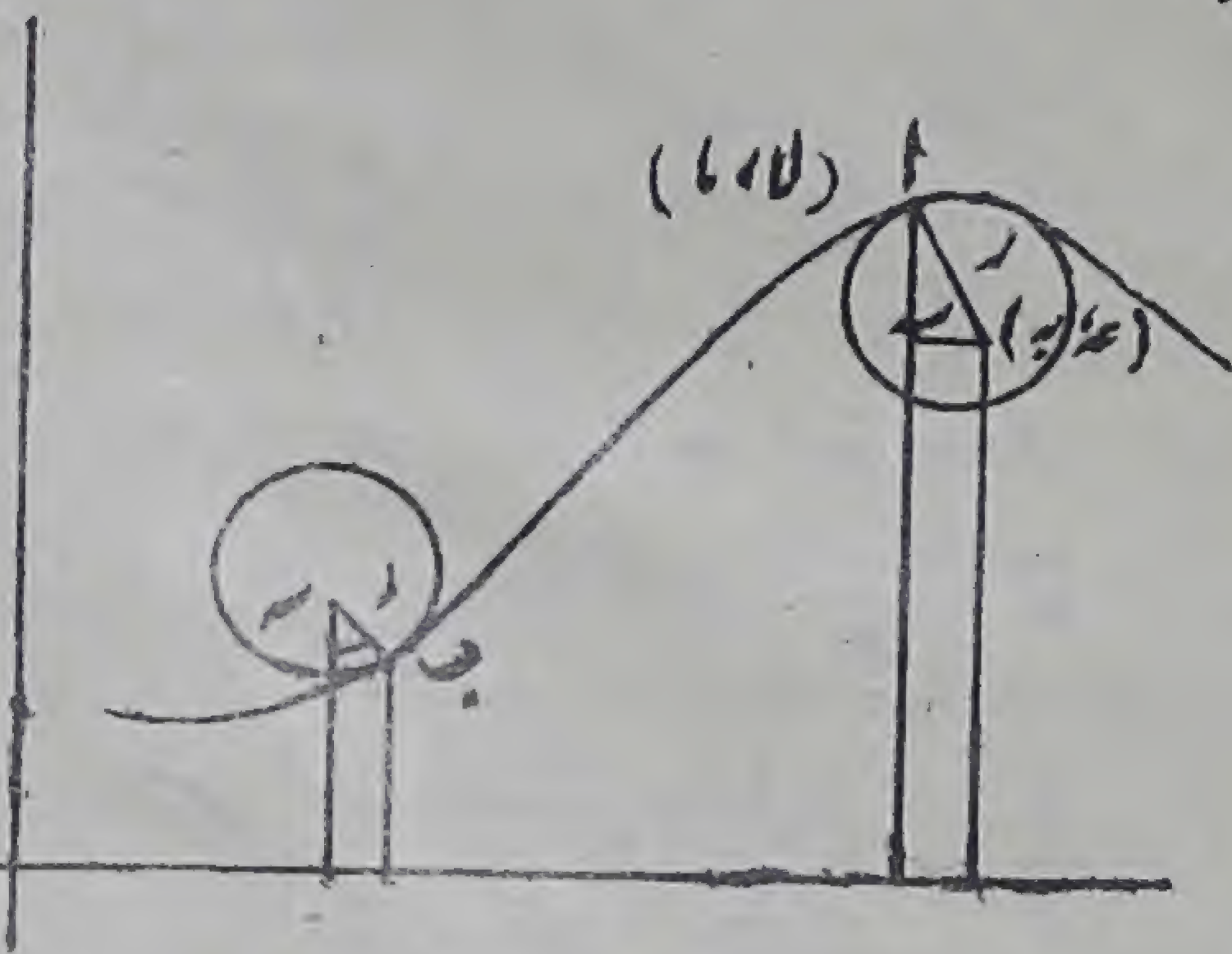
$$\text{ر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسہ}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسہ}}$$

$$= \pm\left[1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسہ}}$$

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرسہ}}$ معلوم کرنے کے لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = مس سہ کو تفرق کرو تو

$$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \text{قط}^2\,\text{سہ} \times \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرلا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسہ}} = \frac{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}{\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}}$$

$$\therefore \text{ر} = \pm\frac{\left[1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}}$$

مرکز کے محدّد (عہ، بہ) دریافت کرنے کے لیے شکل پر غور کرو ۔ نقطہ ا پر منحنی نیچے کی طرف مقعر ہے اور

$$\text{عہ} = \text{لا} + \text{رجب سہ}$$

$$\text{بہ} = \text{ما} - \text{رجم سہ}$$

لیکن نقطہ ب پر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہے

اور $\text{عہ} = \text{لا} - \text{ر}\ \text{جب سہ}$

$\text{بہ} = \text{ما} + \text{ر}\ \text{جم سہ}$

ان میں کے جملے کی مناسب علامت کا خیال رکھ کر درج کرنے سے عہ اور بہ کے لیے ایک ہی جملے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{جب سہ} = \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}} \quad \text{اور جم سہ} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}}$$

$$\text{اس لیے عہ} = \text{لا} - \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\left[1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right]}{\frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر لا}^2}} \quad \text{اور بہ} = \text{ما} + \frac{1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}{\frac{\text{فر}^2\ \text{ما}}{\text{فر لا}^2}}$$

انحنا کے مرکز کے طریق کو **بر پیچہ** کہتے ہیں اور اس کی مساوات، منحنی کی مساوات اور عہ اور بہ کے جملوں میں سے لا، ما کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

مثال (۱) منحنی $۶\ \text{ما} = \text{لا}^۳ - ۱۲\text{لا} - ۲$ کے نقطہ (۲، ـ ۳) پر انحنا کا مرکز اور نصف قطر دریافت کرو:۔

$$۶ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۳\text{لا}^۲ - ۱۲ \quad \therefore \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)_{۲،-۳} = \text{صفر}$$

$$\text{اور}\ ۶ \frac{\text{فر}^۲\ \text{ما}}{\text{فر لا}^۲} = ۶\ \text{لا} \quad \left[\frac{\text{فر}^۲\ \text{ما}}{\text{فر لا}^۲}\right]_{\text{لا}=۲} = ۲$$

$$\text{اس لیے عہ} = ۲ + \text{صفر} = ۲$$

$$\text{بہ} = -۳ - \frac{۱ + ۰}{۲} = -\frac{۷}{۲}$$

$$\text{اور ر} = \frac{\left[۱ + ۰\right]^{\frac{۳}{۲}}}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

ذیل کے منحنیوں کے دیے ہوئے نقطوں پر انحنا کے مرکز کے محدد اور نصف قطر

دریافت کرو :-

(۲) $\text{ما} = \text{لا}^{۳}$ کے نقاط (۱، ۱) (-۲، -۸) اور $(\frac{۱}{۲}، \frac{۱}{۸})$

(۳) $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ کے نقاط $(۱، \frac{۱}{۲})$ اور (-۲، ۲)

(۴) $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{و}^{۲}} \pm \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} = ۱$ کے نقطہ (و، ۰)

(۵) $\left(\frac{\text{لا}}{\text{و}}\right)^{\frac{۲}{۳}} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{۲}{۳}} = ۱$ کے نقطہ (۰، ب)

(۶) تبدیلی مساوات کی صورت میں کسی نقطہ پر انحنا کے مرکز کے محدد اور نصف قطر دریافت کرو :-

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات ہے لا = ف (ت) اور ما = فہ (ت)

اب $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}}$ اس لیے $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}}\right)$

$$= \frac{\text{فر}}{\text{فر ت}}\left(\frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}}\right) \times \frac{۱}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر ت}^{۲}} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}} \times \frac{\text{فر}^{۲}\text{ لا}}{\text{فر ت}^{۲}}}{\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)^{۳}}$$

$$\text{پس حہ} = \text{لا} + \frac{\left[\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\right)^{۲}\right] \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}}{\left[\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر ت}^{۲}} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ لا}}{\text{فر ت}^{۲}}\right]}$$

$$\text{بہ} = \text{ما} - \frac{\left[\left(\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\right)^{۲} + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\right)^{۲}\right]\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر ت}^{۲}} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ت}}\,\frac{\text{فر}^{۲}\text{ لا}}{\text{فر ت}^{۲}}}$$

$$\text{اور } \text{س} = \frac{\left[\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\right)^{2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ا}}{\text{فرت}^{2}} - \frac{\text{فرا}}{\text{فرت}}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{لا}}{\text{فرت}^{2}}}$$

(۷) لا = ۳ ت^۲ ، ا = ۳ ت ـ ت^۳ کے نقطہ ت = ۱ پر انحنا اور مرکز انحنا کے محدد دریافت کرو۔

(۸) لا = ۴ جب طہ ، ا = ۲ جم طہ کے نقطہ لا = ۲ پر نصف قطر انحنا دریافت کرو۔

(۹) ثابت کرو کہ لا = لـ جم^۳ طہ ، ا = لـ جب^۳ طہ کے کسی نقطہ پر نصف قطر انحنا = ۳ لـ جب طہ جم طہ

(۱۰) ا = لا^۴ ـ ۲ لا^۲ میں اعظم اور اقل نقطوں پر انحنا معلوم کرو۔

(۱۱) ۳ ا = لا^۳ ـ ۲ لا پر وہ نقاط معلوم کرو جہاں انحنا اعظم یا اقل ہے۔

(۱۲) لا^۲/لـ^۲ + ا^۲/ب^۲ = ۱ میں کسی نقطہ پر مرکز انحنا کے محدد معلوم کرو اور برپیچ کی مساوات حاصل کرو۔

ذیل کے منحنیوں میں کسی نقطہ (لا ، ا) پر نصف قطر انحنا اور انحنا کے مرکز کے محدد دریافت کرو :—

(۱۳) ا = لا^۲

(۱۴) ب^۲ لا^۲ ـ لـ^۲ ا^۲ = لـ^۲ ب^۲

(۱۵) لا^(۲/۳) + ا^(۲/۳) = لـ^(۲/۳)

(۱۶) لا = ۲ ت ، ا = ۲ ت^۲ ـ ۱

(۱۷) لا = ۲ ت + ۱ ، ا = ت^۲/۲

(۱۸) لا = جب طہ ، ا = طہ

(۱۹)　لا = ا ـ جم طہ　　ما = طہ ـ جیب طہ

(۲۰)　ما = لوک قطا لا

(۲۱)　زاویہ ۲ لا ما = قٓ کے لیے ثابت کرو کہ

$$ه + به = \frac{(ما + لا)^{۳}}{ق^{۲}} \quad اور \quad ه - به = \frac{(ما - لا)^{۳}}{ق^{۲}}$$

اور اس سے برپیچ کی مساوات نکالو۔

(۲۲)　اٰ = قٓ لا کے مرکز انحنا کے محدد اور نصف قطر دریافت کرو۔ بالخصوص مبدا پر ان کی قیمتیں حاصل کرو۔

جوابات

مشقی سوالات (۱) صفحہ ۱۳

(۱) ۸، ۱۸، ۴، ۔۶، ۔۲۹۶ (۲) $\frac{۱}{۳}$، ۰، ۔۵، $\frac{۱۳}{۱۴}$، ∞، ۲۱

(۴) ا لا^{۲} + (ب + ۲ا) لا + (ا + ب + ج)؛ ا لا^{۲} + (ب ۔ ۲ا) لا + (ا ۔ ب + ج)؛ ا ھ^{۲} + ۲ ا ھ لا + ب ھ؛ (۵) ∞

(۶) غیر معین (۱۱)؛ $\frac{۳}{۴}$، ۴ ۔ ۳ √۲ (۱۲) ۱، ۱

(۱۳) ۲ ۔ √۳ (۱۴) $\frac{۲ + ۳\sqrt{۲}}{۹}$ (۱۵) ۴ا^{۲} + $\frac{۱}{ا۲}$ ۔ ۲، ۔ $\frac{۱}{۲لا}$ ۔ ۲ + لا

(۱۶) $\frac{۱}{۹}$ ۴ھ^{۲} ۲م^{۲} + م ۔ ۱ + $\frac{۱}{۱ + م}$ (۱۷) ھ (۲لا + ھ + ۱)

(۱۸) ۔ $\frac{۱}{۱ + ھ}$ (۲۲) $\frac{۱}{۲لا}$

مشقی سوالات (۲) صفحہ ۳۰

(۱) صفر (۲) ∞ (۳) صفر، صفر، صفر،

(۴) صفر (۵) صفر (۶) ∞ (۷) قوا تز غیر محدود اہتزاز

کرتا ہے ۔ (۸) ۱۰۰۰

مشقی سوالات (۳) صفحہ ۳۹

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{۱}{۳}$ (۳) $\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۳}$ (۵) $\frac{۱}{۴}$

(۶) تواتر محدود اہتزاز کرتا ہے۔ (۷) $\frac{۲}{۳}$ (۸) $\frac{۳}{۷}$

مشقی سوالات (۴) صفحہ ۵۵

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $-\frac{۳}{۴}$ (۳) $\frac{۱}{۷}$ (۴) $\frac{۱}{۳}$ (۵) -۱

(۶) ۱ (۷) -۴ (۸) ۷ (۹) ۳ (۱۰) ۱ (۱۱) $\frac{۱}{۲}$

(۱۲) ۲ (۱۳) $\frac{۲}{۳}$ (۱۴) $\frac{۱}{۴}$ (۱۵) ۳ لا^{۲} (۱۶) $-\frac{۲}{۹}$ (۱۷) -۸

(۱۸) ۲ل (۱۹) $\frac{۲}{۳}$ (۲۰) -۱ (۲۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲۲) $\frac{۴}{۵}$ (۲۳) ۱

(۲۴) صفر (۲۵) ۲ (۲۶) صفر (۲۸) -۱ (۲۹) صفر (۳۰) ∞

(۳۱) صفر (۳۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳۳) صفر (۳۴) ∞ (۳۵) $\frac{۱}{۲}$ (۳۶) $-\frac{۱}{۱۲}$

(۳۷) -۱۲ (۳۸) $\frac{۳}{۲}$ (۳۹) $\frac{۱}{۳}$ (۴۰) صفر (۴۱) صفر۔

مشقی سوالات (۵) صفحہ ۷۰

(۵) (ا) لا = $\pm\frac{۳}{۲}$ (ب) لا = -۱ (ج) لا = $\pm\frac{ن\pi}{۲}$ (ن = ۰، ۱، ۲، ۳ .....)

(د) لا = -۳، -۲، ۲، ۳ (ہ) لا = $\pm$ (۲ن + ۱) $\frac{\pi}{۲}$ (ن = ۰، ۱، ۲ ...)

(و) لا = $\pm$ (۲ن + ۱) π (ن = ۰، ۱، ۲ .....)

(۶) ۲۷

مشقی سوالات (۶) صفحہ ۹۴

(۱) ۴ (۲) $\frac{۳}{۴} \times ۲^{-\frac{۱}{۴}}$ (۳) $۳ ل^{۲}$ (۴) $۲ن ل^{۲ن - ۱}$

(۵) $(۲ن + ۱) ل^{۲ن}$ (۶) $۴ لا^{۳}$ (۷) $\frac{۲}{۳} لا^{-\frac{۱}{۳}}$ (۸) $\frac{۱}{۴} لا^{-\frac{۳}{۴}}$

(۹) $\frac{۱}{ن} لا^{\frac{۱}{ن} - ۱}$ (۱۰) صفر (۱۱) $\frac{-۱}{۲ل^{۲}}$ (۱۲) $\frac{۳}{۲۰}$

(۱۳) $\frac{۲}{ل^{۲}}$ (۱۴) $\frac{۱}{ن ل^{ن - ۱}}$ (۱۵) $\frac{۳}{۲} ل^{\frac{۱}{۲}}$

مشقی سوالات (۷) صفحہ ۹۸

(۱) ۳ (۲) $\frac{۲}{۳}$ (۳) ۱ (۴) ۴

(۵) صفر (۶) ۱ (۷) ۸ (۸) ۴ (۹) $\frac{۳}{۲}$

(۱۰) جب عہ - عہ جم عہ

مشقی سوالات (۸) صفحہ ۱۰۲

(۱) (ا) $\frac{۱۶}{۹}$، $-\frac{۸}{۹}$، $\frac{۵۵}{۹}$، $\frac{۵۶}{۲۵}$، ۲۴، صفر

(ب) ۱۸، $\frac{۴۷۳}{۵۴}$، $\frac{۱۷۳}{۲}$، -۵۲۷، $\frac{-۹۵۳}{۲۵۰}$

(۲) $\frac{۲۵۰}{۲^{۳۷}}$، $\frac{۱۲۵}{۲۱ \times ۳^{۲}}$، $\frac{۵٫۵}{۲۴٫۰۱}$، $\frac{۵٫۰۵}{(۵٫۱۷)^{۲}}$، $\frac{-۲}{۱۲۱}$

(۳) $\frac{-۹۴}{۲۵}$، $\frac{-۱۲۹}{۲۵}$

(۴) (ا) $\frac{۵(\sqrt{۲} - ۱)}{۲}$، $-\frac{۵}{۲}$

(ب) $\frac{\sqrt{۲}-\sqrt{۳}}{۲}$ ، $\frac{۲-\sqrt{۳}}{۲}$

(ج) $\frac{۵}{۴}$ ، $(\sqrt{۳}-۱)$ ، $-\infty$

(د) ۳ $\sqrt{۲}-\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ، ۴- ، $+\infty$

مشقی سوالات (۹) صفحہ ۱۰۷

(۱) (ا) ۲۸، ۴، ۱۹، ۷، $\frac{۳۳۱}{۲۵}$ ، $\frac{۲۷۱}{۲۵}$ ، $(۳+\frac{۳۰۰۱}{۶۱۰})$

(ب) $۴(\pm\frac{۳}{۲}-۱)$ ، $۴(\pm\frac{۵}{۴}-۱)$ ، $۴(\pm\frac{۱}{۵۱۰}-۱)$

(ج) $\frac{جب(\frac{\pi}{۳}\pm\pi/۹۰)-جب\,\pi/۳}{\pm\pi/۹۰}$ ، $\frac{جب(\pi/۳\pm\pi/۱۸۰)-جب\,\pi/۳}{\pm\pi/۱۸۰}$

$\frac{جب(\pi/۳\pm\pi/۳۶۰)-جب\,\pi/۳}{\pm\pi/۳۶۰}$

(د) $\frac{مس(\pi/۴\pm\pi/۳۶۰)-مس\,\pi/۴}{\pm\pi/۳۶۰}$ ، $\frac{مس(\pi/۴\pm\pi/۵۴۰)-مس\,\pi/۴}{\pm\pi/۵۴۰}$

عددًا ان کی قیمتیں معلوم کرو۔

(ھ) $\frac{۱۱\times۲۵}{۲۹(۲۹\pm\frac{۱۵}{۴۱۰})}$ ، $\frac{۱۱\times۲۵}{۲۹(۲۹\pm\frac{۴۵}{۶۱۰})}$

(و) $\frac{-۷۱۰}{۳۶\times۳۶\times۴۹}$ ،

(۲) ۳۶، صفر، -۲، ۱

مشقی سوالات (۱۰) صفحہ ۱۱۰

(۱) ۲، (۲) ۶لا، (۳) $۳لا^۲$ (۴) ۲لا+۲، (ھ) $۳لا^۲-۳$

(۶) -۲ (۷) -۱۲لا^{۳} (۸) $-\frac{۱}{لا^{۲}}$ (۹) $\frac{۹}{لا^{۴}}$ (۱۰) $-\frac{۱۷}{(۳لا-۴)^{۲}}$

(۱۱) ۲جم۲ طہ (۱۲) - ۳جب۳ طہ (۱۳) قط^{۲} طہ

(۱۴) ۲ قط۲طہ مس۲طہ (۱۵) ۲ ا لا + ب

مشقی سوالات (۱۱) صفحہ ۱۱۱

(۱) $\frac{لا^{۳}}{۳}$ + م (۲) $\frac{۳لا^{۲}}{۲}$ + ۲لا + م (۳) $\frac{۲لا^{۳}}{۳}$ - $\frac{۳لا^{۲}}{۲}$ + م

(۴) لا^{۲} - لا + م (۵) - جم لا + م (۶) جب لا + م

(۷) $\frac{-جم۲لا}{۲}$ + م (۸) $\frac{۱}{۳}$ جب ۳ لا + م (۹) ۲لا + $\frac{۳}{لا}$ + م

(۱۰) $\frac{۳لا^{۲}}{۲}$ - $\frac{۷}{۲لا^{۲}}$ - لا + م (۱۱) ($-\frac{جم۲لا}{۲}$ - $\frac{جب۳لا}{۳}$) + م

مشقی سوالات (۱۲) صفحہ ۱۱۳

(۱) ۲ (۲) ۴لا + ۳ (۳) -۳ - ۱۰لا - $\frac{۸}{لا^{۲}}$

(۴) ۱۰ص - $\frac{۱۸}{ص^{۴}}$ (۵) ۵۰ی^{۴۹} - ۵۰ (۶) ۲ا لا + ۲ب

(۷) ۲لا$^{-\frac{۱}{۳}}$ + ۳لا$^{\frac{۱}{۲}}$ (۸) $\frac{\frac{۶}{۵}ی^{-\frac{۱}{ی}}-\frac{۳}{۵}}{۵}$ (۹) $\frac{۱}{۹}$لا$^{-\frac{۵}{۹}}$ (۱۰) $-\frac{۳}{۲}$لا$^{-\frac{۳}{۲}}$

(۱۱) $\frac{۵}{۲}$ا$^{-\frac{۱}{۲}}$ (۱۲) $-\frac{ا}{۲}$ت$^{-\frac{۳}{۲}}$ + $\frac{ب}{۲}$ت$^{-\frac{۱}{۲}}$ + $\frac{۳}{۲}$ج ت$^{\frac{۱}{۲}}$

(۱۳) ۹ی$^{-\frac{۱}{۴}}$ - ۹ی$^{-\frac{۷}{۴}}$ (۱۴) - $\frac{ا۳}{ت^{۴}}$ - $\frac{۲ب}{ت^{۳}}$ - $\frac{ج}{ت^{۲}}$

(۱۵) $\frac{۵لا^{۳}}{۳}$ + م (۱۶) ($\frac{۳لا^{۲}}{۲}$ + $\frac{۵لا^{۴}}{۴}$ - ۷لا) + م

(۱۷) $\left(\frac{۲ لا^{۳}}{۳} + \frac{۱}{لا} \right) + م$ (۱۸) $\frac{(ص + ۲)^{۳}}{۳} + م$

(۱۹) $\left(ی^{۲} - \frac{۳}{۲} ی^{-۲} \right) + م$ (۲۰) $\frac{(ل لا + ب)^{۴}}{۴ل} + م$

(۲۱) $\frac{۵ \times ۲^{\frac{۱}{۵}} لا^{\frac{۷}{۵}}}{۷} + م$ (۲۲) $\left(\frac{۱۲}{۷} لا^{\frac{۷}{۴}} + \frac{۱۵}{۷} لا^{\frac{۷}{۳}} \right) + م$

(۲۳) $\frac{۶}{۷} ت^{\frac{۷}{۶}} + م$ (۲۴) $۲\sqrt{ت} \left(ل + \frac{ب ت}{۳} + \frac{ج ت^{۲}}{۵} \right) + م$

(۲۵) $\frac{۱۶}{۷} ی^{\frac{۷}{۴}} + ۲۸ ی^{\frac{۱}{۴}} - ۳ی + م$ (۲۶) $\frac{۱۵}{۱۳} \times و^{\frac{۱۳}{۱۵}} \times ۵ \frac{۱}{۳۷}$

مشقی سوالات (۱۳) صفحہ ۱۱۶

(۱) $۶(۲لا + ۱)^{۲}$ (۲) $۳(۲لا + ۳)(لا^{۲} + ۳لا + ۵)^{۲}$

(۳) $۶(۲لا^{۲} - ۱)(۲لا^{۳} - ۳لا + ۷)$ (۴) $۴(۱۰ی - ۳)(۵ی^{۲} - ۳ی - ۱)^{۳}$

(۵) $۴(۳ط^{-۲} - ۲)(ط^{-۳} - ۲ط)^{۳}$ (۶) $۹(۳لا - ۱)^{۲} + \frac{۱۲}{(لا + ۷)^{۴}}$

(۷) $-۹(۲ی - ۱)^{-۴}$ (۸) $\frac{-۲۰(۲لا - ۳)}{(لا^{۲} - ۳لا - ۳)^{۵}}$

(۹) $۵۰(۵لا^{۲} - ۲)^{۴} لا - \frac{۱۱۲(لا + ۱)}{(۲لا^{۲} + ۴لا - ۳)^{۸}}$ (۱۰) $۹۰(۲لا - ۱)^{۴} - ۱۸(۲لا - ۱)^{۲}$

(۱۱) $\left(۶ص + ۲ + \frac{۱}{ص^{۲}} \right)\left(۲ + \frac{۶لا}{(لا^{۲} + ۵)^{۴}} \right)$ جہاں $ص = ۲لا - \frac{۱}{(لا^{۲} + ۵)^{۳}}$

(۱۲) $\frac{۶ - ۴لا}{۳} (۲ - لا)^{-\frac{۲}{۳}}$

(۱۳) $-\frac{۲}{۳} (۲لا)^{-\frac{۲}{۳}} + \frac{۸لا}{۵} (۴لا^{۲} + ۵)^{-\frac{۴}{۵}}$ (۱۴) $-(۱۰ - ۲لا)^{-\frac{۱}{۲}}$

(۱۵) ۲/۳ (لا - ۱)(لا^۲ - ۲لا + ۳)^{-۲/۳} (۱۶) ۲ت(۷ت - ۱) / (۶ت - ۱)^{۲/۳}

(۱۷) (۲لا - ۱)^۴ / ۸ + م (۱۸) (۴لا + ۳)^۳ / ۱۲ + م (۱۹) (۳لا - ۲)^{-۱} / -۳ + م

(۲۰) -(۵لا + ۱)^{-۳} / ۱۵ + م (۲۱) لا^۲ + ۳لا + ۲ / (لا + ۱)^۲ + م

(۲۲) (۲لا^۴ - ۷لا^۲ / ۲ + لا - ۴ / ۵لا^۵ - ۲ / ۳(۳لا - ۱) + م)

(۲۳) (۴لا^۳ - ۷لا + ۱)^۵ / ۵ + م (۲۴) ۱/۸ (۵لا^۲ - ۴لا + ۲)^۴ + م

(۲۵) - ۳/۴ (۲ - لا)^{۴/۳} + م (۲۶) لا^{۲/۳} - ۳/۵ لا^{۵/۳} + م

(۲۷) ۱/۴ (۶و - ۱)^{۲/۳} + م (۲۸) - ۵/۱۸ (۲ - ۳ت)^{۶/۵} + م

مشقی سوالات (۱۴) صفحہ ۱۲۱

(۱) -۲جب ۲(۲ط + ۳) (۲) -۹/ط^۲ جب^۲(۳/ط) جم(۳/ط)

(۳) ۲جم(۲ط - ۳) + ۲مس ط قط^۲ ط (۴) جم ۲ط

(۵) ۲جم(۲ط - ۳) جم ط - جب(۲ط - ۳) جب ط

(۶) -۲قم(۲ط) مم(۲ط) (۷) ۲قط^۲ (ط - ۴) مس(ط - ۴)

(۸) ۲قط^۲(۲لا + ۱) + ۳قم^۲(لا + ۱) مم(لا + ۱)

(۹) جم(۲لا + ۱) جم(لا - ۲) - ۲جب(۲لا + ۱) جب(لا - ۲)

(۱۰) ۳ قط۲ (۲ لا۲ - ۳ لا + ۴) مس (۲ لا۲ - ۳ لا + ۴) × (۴ لا - ۳) - ۲۰ قم۴ (۵ لا) مم (۵ لا)

(۱۱) - ۱/۲ جم (۲ لا + ۳) + مر (۱۲) جب (لا - ۱) + مر

(۱۳) ۱/۴ مس (۴ لا - ۱) + مر (۱۴) ط/۲ - ۱/۴ جب ۲ ط) + مر

(۱۵) (ط جب۶ - ۱/۴ جم ۴ ط)/۲ + مر (۱۶) - ۱/۲ مم (۲ ط) + مر

مشقی سوالات (۱۵) صفحہ ۱۲۴

(۱) ۲ لا (۴ لا۲ + ۱) (لا۲ + ۱) (۲) - (۴ لا + ۹) لا^-۴ (۲ لا + ۳)۲

(۳) ۶ (۳ لا۲ + ۳ لا - ۱) / (۶ لا + ۳)۲ (۴) (۱۰ جم لا - (۸ لا۲ - ۲ لا - ۳) جب لا) / (۲ لا + ۱)۲

(۵) ((۲ مس لا + ۳) جب ۲ لا - ۲ قط۲ لا (جب۲ لا + ۱)) / (۲ مس لا + ۳)۲

(۶) ۲ جب ط قط۲ (۲ ط + ع) + جم ط مس (۲ ط + ع)

(۷) جم (ط + ع) جم (ط - ع) - جب (ط + ع) جب (ط - ع) = جم ۲ ط

(۸) ((ا لا + ب) جب (لا + ع) (ا ج لا + ۲ ا د - ب ج) + جم (لا + ع) (ا لا + ب)۲ (ج لا + د)) / (ج لا + د)۲

(۹) - (۳۵ لا۲ + ۱۴ لا + ۳۳) / (۷ لا۲ + ۸ لا - ۵)۲

(۱۰) ما [۸/(۲ لا - ۱) + ۲ (۱۰ لا + ۳)/(۵ لا۲ + ۳ لا - ۲) - ۴۸/(۸ لا۲ + ۳) - ۶/(۳ لا + ۲)]

جہاں ما = (۲ لا - ۱)۴ (۵ لا۲ + ۳ لا - ۲)۲ / ((۸ لا۲ + ۳)۳ (۳ لا + ۲)۲)

(۱۱) [۲ مس ۲ ط + ۳ مم ۳ ط + ۳ مس ۳ ط - ۴ مم (۴ ط + ۵)] ما

ما = قط (۲ طہ) مس ۳ طہ / جب (۴ طہ + ۵)

(۱۲) (- مم فہ - ۲ مس (۲ فہ - ۱) - ۲ مم (۲ فہ - ۱) + ۳ مس (۳ فہ) - ۱/(فہ+۲)) ما

ما = تم فہ مم (۲ فہ - ۱) قط (۳ فہ) / (فہ + ۲)

مشقی سوالات (۱۶) صفحہ ۱۲۶

(۱) - (۱ + ۲ ما) / ۲ (لا + ۳ ما + ۲) (۲) ۱ / (۲۱ ما^{۲} - ۱۲ ما)

(۳) - ۱ / ۲ تم (۲ ما + ۳) مم (۲ ما + ۳) (۴) (۴ ما^{۳} + ۳ ما) / (۲۰ ما - ۱۲ ما^{۲} لا - ۳ لا)

(۵) (ما - ۲ لا قط^{۲} (لا^{۲} + ما^{۲})) / (- لا + ۲ ما قط^{۲} (لا^{۲} + ما^{۲})) (۶) ۱/لا × (قط لا/ما مس لا/ما - ۲ لا ما) / (قط لا/ما مس لا/ما)

(۷) - (۲ √(لا ما) + ما) / (۲ √(لا ما) + لا) (۸) ما/لا (۹) لا (۲ لا^{۲} - ما^{۲}) / ما (لا^{۲} - ۴ ما^{۲})

(۱۰) (ما - لا^{۲}) / (ما^{۲} - لا) (۱۱) - ۱/۴ (۱۲) - ۲/۳ (۱۳) ۲/۳

(۱۴) ۱/۲ (۱۵) ۳/۴ ، - ۴/۳ ، - ۴/۳

مشقی سوالات (۱۷) صفحہ ۱۳۱

(۱) - ۲ جب (۲ لا + ۳) / جم (۲ لا + ۳) √(جم^{۲} (۲ لا + ۳) - ۱) (۲) - ۲

(۳) $-\frac{1}{\sqrt{\text{د}^2-\text{لا}^2}}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{\text{د}^2-\text{لا}^2}}$ (۵) $\frac{\text{د}}{\text{د}^2+\text{لا}^2}$

(۶) $\frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-\text{د}^2}}$ (۷) $-\frac{\text{د}}{\text{د}^2+\text{لا}^2}$ ؛ $-\frac{\text{د}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-\text{د}^2}}$

(۸) $\frac{-1}{(1-\text{لا})\sqrt{\text{لا}^2-2\text{لا}}}$ (۹) $\frac{\text{لا}^2}{1+\text{لا}^2}+2\text{لا}\,\text{مس}^{-1}\text{لا}$

(۱۰) $\text{مس}^{-1}\text{لا}^2+\frac{2\text{لا}^2}{1+\text{لا}^4}+\frac{5}{4+\text{لا}^2}$ (۱۱) $\frac{1}{2\sqrt{\text{لا}}\,(1+\text{لا})}$

(۱۲) $\frac{1}{2\sqrt{\text{لا}-4}}+\frac{4}{4+(\text{لا}-4)^2}$

(۱۳) $\frac{2\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^4}}+\text{قط}^{-1}\frac{\text{لا}}{2}+\frac{4}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2-4}}$

(۱۴) $-\text{قط}^{-1}(\text{د}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})\times\frac{(2\text{د}\text{لا}+\text{ب})}{(\text{د}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})\sqrt{(\text{د}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})^2-1}}$

$+\text{قم}^{-1}(\text{د}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})\times\frac{(2\text{د}\text{لا}+\text{ب})}{(\text{د}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})\sqrt{(\text{د}\text{لا}^2+\text{ب}\text{لا}+\text{ج})^2-1}}$

(۱۵) $\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{د}}$ (۱۶) $\frac{1}{3}\text{جم}^{-1}\frac{2}{3\text{لا}}$ (۱۷) $\frac{1}{\text{د}^2}\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{د}^2}$

(۱۸) $\frac{1}{\text{د}\text{ب}}\text{مس}^{-1}\frac{\text{ب}\text{لا}+\text{ج}}{\text{د}}$ (۱۹) $\frac{1}{12}\text{مس}^{-1}\frac{2\text{لا}^2}{3}$

(۲۰) $\text{لا}-\frac{3}{2\sqrt{3}}\text{مس}^{-1}\frac{\sqrt{3}\,\text{لا}}{2}$ ....

(۲۱) $\frac{4}{3}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\text{مس}^{-1}\sqrt{3}\,\text{لا}$

(۲۲) $\text{د}\text{لا}+\frac{\text{ب}-\text{د}^2}{\text{د}}\text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{د}}$

(۲۳) $\frac{۱}{ٹ}$ جب$^{-۱}$ $\frac{ٹ}{۵}$لا (۲۴) - جب$^{-۱}$ $\frac{ک - لا}{ک}$

(۲۵) - جب$^{-۱}$ $\frac{ب - ۲ط}{ب}$ (۲۶) $\frac{۱}{۸ ٹ}$ جب$^{-۱}$ $\frac{۲ک}{۳ ٹ}$ (۲۷) $\frac{۱}{ک}$ قط$^{-۱}$ $\frac{لا}{ک}$

(۲۸) $\frac{۱}{۴}$ قط$^{-۱}$ $\frac{۲لا}{۳}$ (۲۹) $\frac{۱}{۱۲ ٹ}$ قط$^{-۱}$ $\frac{۲لا}{۱۲ ٹ}$

(۳۰) (۲لا - $\frac{۱}{۳ ٹ}$ قط$^{-۱}$ $\frac{ٹ۵لا}{۳ ٹ}$)

مشقی سوالات (۱۸) صفحہ ۱۳۷

(۱) $\frac{\text{لا جم لا - جب لا}}{\text{لا}^۲}$ (۲) $\frac{۱}{\text{و}^{\text{لا}}(\text{لا} + ۱) - ۱}$

(۳) $\frac{۱}{۲ ٹلا}$ و$^{\text{ٹلا}}$ (۴) لا$^{\text{لا}}$ (لوک لا + ۱)

(۵) (ٹلا)$^{\text{لا}}$ × $\frac{\text{لا}}{۲}$ (۱ + ۲ لوک لا) (۶) $\frac{۶\text{لا}^۲ + ۳}{۲\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} - ۵}$

(۷) ۱۰ لا و$^{۵\text{لا}^۲ + ۲}$ (۸) (ٹلا)$^{\text{ٹلا}}$ × $\frac{۱}{۲ ٹلا}$ (۱ + لوک ٹلا)

(۹) $\left\{ \frac{۸\text{لا} + ۳}{۴\text{لا}^۲ + ۳\text{لا}} + \frac{\text{لوک}(۴\text{لا}^۲ + ۳\text{لا})}{۲} \right\}$ $\text{ٹو}^{\text{لا}}$

(۱۰) (جب س)$^{\text{لا}}$ (قط لا لوک جب لا + ۱)

(۱۱) (س لا)$^{\text{س لا}}$ [قط^۲ لا لوک س لا + قط^۲ لا]

(۱۲) (قط لا)$^{\text{قم لا}}$ (- قم لا قم لا لوک قط لا + قط لا)

(۱۳) و^مس^-۱ (قط لا/۲) × ۱/۲ (مس لا/۲ قط لا/۲) / (۱ + قط^۲ لا/۲)

(۱۴) و^(۲لا^۲ - ۳لا) { ۴لا - ۳ [لوک (۴لا^۲ + ۳)] + ۱۶لا/(۴لا^۲ + ۳) لوک (۴لا^۲ + ۳) }

(۱۵) و^(۲لا^۲ + ۳)/۲ + مر (۱۶) و^(۵لا - ۱)/۵ + مر (۱۷) و^(۲لا^۲ + ۳لا - ۴) + مر

(۱۸) ۱/۴ لوک (۴لا + ۳) + مر (۱۹) ۱/۷ لوک (۷لا - ۲) + مر

(۲۰) لوک (۷لا^۲ - ۵لا + ۱) + مر (۲۱) و^(لا^۳ + ۱لا) + مر

(۲۲) ۳/۷ لوک (۷لا + ۸) + مر (۲۳) ۳/۴ لا + ۱۹/۱۶ لوک (۴لا + ۳) + مر

(۲۴) لا + لوک (۳لا^۲ + لا - ۱) + مر

مشقی سوالات (۱۹) صفحہ ۱۴۰

(۱) ۳۰ (۲) ۴۰.۵۰لا^۳ + ۴۰۸لا (۳) ۲^۴ جم (۲لا + ۳ + ۴ + π/۲)

(۴) ۲^۳ و^(۲لا - ۳) (۵) صفر (۶) و^جب لا [جم^۲ لا - جب لا]

(۸) (ل^۲ + ن^۲)^(ن/۲) و^(ل لا) جم (ن لا + ن π/۲)

(۹) -۲^(ن - ۱) جم (۲لا + ن π/۲) (۱۲) لا فرما/فرلا = ما^۲/(۱ - ما لوک لا)

(۱۵) ۲(-۱)^ن ان/(۳ + لا)^(ن+۱) (۱۶) (-۱)^(ن-۱) ان - ۱/(۲لا - ۳)^ن × ۲^ن

(۱۷) ۲^۱۰ و^۲لا × لا^۳ + ۱۰اج۱ × ۲^۹ و^۲لا × ۳لا^۲ + ۱۰اج۲ ۲^۸ و^۲لا × ۶لا + ۱۰اج۳ ۲^۷ و^۲لا × ۶

(۱۸) (جب لا)^جم لا [- جب لا لوک جب لا + جم لا قم لا]

(۱۹) (جب لا)^مس لا {قط² لا لوک جب لا + ۱} (۲۰) لا و^لا + ۶ و^لا

(۲۱) لا⁴/۱۲ + م₁ لا + م₂ (۲۲) لا⁴/۱۲ - لا³/۲ + لا²/۲ + م₁ لا + م₂

(۲۳) - جب لا + م₁ لا + م₂ (۲۴) م لا²/۲ + م₁ لا + م₂

(۲۵) (لا - ۳)^{-۲}/۶ + م₁ لا + م₂ (۲۶) ۵/۱۶ لوک (۲ لا + ۷) + م₁ لا²/۲ + م₂ لا + م₃

مشقی سوالات (۲۰) صفحہ ۱۴۴

(۱) - لا/ی ، - ا/ی ، - (لا² + ی²)/ی³ ، (ا² + ی²)/ی³ ، - لا ا/ی³

(۲) ا لا^(ا-۱) ، لا^ا لوک لا

(۳) ۱/(ا² - لا²) ، ا/(ا² - لا²) ، - لا/(ا(ا² - لا²)³) ، + لا/(ا² (ا² - لا²)^{۳/۲}) ، لا (۲ ا² - لا²)/(ا³ (ا² - لا²)^{۳/۲}) ، - ا/(ا² - لا²)^{۳/۲}

(۴) ن (ر لا² + ب ا² + ج ی²)^(ن-۱) ۲ ج ی

(۶) و^لا۲ + و^ا۲ + ۲ . و^ا و^لا جب (لا + ا)

(۷) [۳ (لا² + ا² + ی²) - ۳ (لا ا + ا ی + ی لا)] / [لا³ + ا³ + ی³ - ۳ لا ا ی] = ۳ / (لا + ا + ی)

باب سوم پر متفرق سوالات صفحہ ۱۴۵

(۱) ۵ (لا³ + ۳ لا² - ۱)⁴ (۳ لا² + ۶ لا)

(۲) (۲۰ لا⁴ + ۱۵ لا³ - ۶ لا² + ۱۰ لا + ۳)(لا³ - ۱) / (۵ لا² + ۳ لا - ۱)²

(۳) $جم\left(\frac{۲لا + ۳}{لا - ۱}\right) \times \frac{-۵}{(لا - ۱)^۲}$ (۴) $قط^۲\left(\frac{۱}{۱ - لا}\right) \times \frac{۱}{(۱ - لا)^۲}$

(۵) $\frac{-\sqrt{۲}}{\sqrt{۱ - ۲لا^۲}}$ (۶) $\frac{-۲}{\sqrt{۱ - ۷لا^۲}\,(۱ - ۳لا^۲)}$

(۷) $\frac{-۱۴لا}{۳۵لا^۴ - ۴لا^۲ + ۱}$ (۸) $\frac{-۲}{\sqrt{۱ - م\,ا^۲}}$ (۹) $\frac{۱}{۲}\, مم\, \frac{ط}{۲}$

(۱۰) $\frac{لوک\, لا}{(۱ + لوک\, لا)^۲}$ (۱۱) $-$ قط ط (۱۲) $و^{۲ - ۳لا^۲}(-۶لا^۴ + ۳لا^۲)$

(۱۳) $\frac{۱۴(۲لا - ۱)}{(لا + ۴)^۲(لا - ۵)^۲}$ (۱۴) $\frac{ا}{لا} - \frac{لا^۲ - ا^۲}{\sqrt{لا^۲ - ا^۲}}$

(۱۵) $\frac{-۹لا}{ا۵}$ (۱۶) $و^{مس\, لا}(جب\, لا\, قط^۲ لا + جم\, لا)$

(۱۷) $و^{جب^۲ لا}(مس\, لا\, جب\, ۲لا + قط^۲ لا)$ (۱۸) $\frac{و^{لا} - و^{-لا}}{۲}$

(۱۹) $\frac{و^{لا} + و^{-لا}}{۲}$ (۲۰) $\frac{۴}{(و^{لا} + و^{-لا})^۲}$

(۲۱) $(جب^{-۱} لا)^{مس\, لا}\left[قط^۲ لا\, لوک\, جب^{-۱} لا + \frac{مس\, لا}{جب^{-۱} لا \sqrt{۱ - لا^۲}}\right]$

(۲۲) $(قم^{-۱} لا)^{جب\, لا}\left[جم\, لا\, لوک\, قم^{-۱} لا - \frac{جب\, لا}{قم^{-۱} لا \times لا \sqrt{لا^۲ - ۱}}\right]$

(۲۳) $\frac{۱}{۴} لوک(۴لا^۲ + ۳) + \frac{۳}{۲\sqrt{۳}} مس^{-۱} \frac{۲لا}{\sqrt{۳}}$

(۲۴) $\frac{(۳لا^۲ + ۳لا - ۵)^{-۵}}{-۱۵} + م$ (۲۵) $\frac{۱}{\sqrt{۸}} مس^{-۱} \frac{لا + ۲}{\sqrt{۸}}$

(۲۶) $\frac{۱}{۶} و^{۳لا^۲} + م$ (۲۷) $\frac{۱}{\sqrt{۷}} جب^{-۱} \frac{\sqrt{۷}\,لا}{\sqrt{۳}} + م$

(۲۸) $\frac{۱}{۲}\ \text{جب}^{-۱}\ \frac{۸\text{لا}-۵}{۵}+\text{م}$ (۲۹) $\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}\ \text{مس}^{-۱}\ \frac{\text{لا}^{۲}}{\sqrt{۵}}+\text{م}$

(۳۰) $\frac{۱}{۲\sqrt{۱۵}}\ \text{مس}^{-۱}\ \sqrt{\frac{۵}{۳}}\ \text{ص}^{۲}+\text{م}$ (۳۱) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \text{قط}^{-۱}\ \sqrt{\frac{۵}{۳}}\ \text{لا}$

(۳۲) $\text{قط}^{-۱}\ ۲\text{س}$ (۳۳) $\frac{۱}{۲}\ \text{قط}^{-۱}\ \frac{\sqrt{۵}\ \text{لا}}{۲}$

(۳۴) $\frac{۲}{\sqrt{۳۹}}\ \text{مس}^{-۱}\ \frac{۴\text{لا}+۷}{\sqrt{۳۹}}$ (۳۵) $\frac{۱}{۲}\text{لوک}\ \frac{\text{لا}-۱}{\text{لا}+۱}$

(۳۶) $\text{لوک}\ \frac{\text{لا}+۲}{\text{لا}+۳}+\text{م}$ (۳۷) $\frac{۳}{۲}\ \text{لوک}\ (\text{لا}+۳)-\frac{۱}{۲}\ \text{لوک}\ (\text{لا}+۱)$

(۳۸) $\frac{۱}{۲}\ \text{لوک قط}\ (۲\text{لا}+۳)$ (۳۹) $\text{لوک}\left\{\text{قط}\ (\text{لا}-۳)+\text{مس}\ (\text{لا}-۳)\right\}+\text{م}$

(۴۰) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}\ \text{جب}^{-۱}\ (۳\text{ما}-۱)$

(۴۱) $\text{و}^{۲\text{لا}}\left[۲^{۷}\text{لا}^{۳}+۷\ \text{ج}_{۱}\ ۲^{۶}\times ۳\ \text{لا}^{۲}+\cdots\cdots+۷\ \text{ج}_{۴}\ ۲^{۴}\times ۶\right]$

(۴۲) $۳^{۵}\ \text{جم}\ (۳\text{لا}+\frac{۵\pi}{۲})$ (۴۳) $\frac{۲\times ۶!}{(۳-\text{لا})^{۷}}$

(۴۴) $۲^{\text{ن}}\ \text{جب}\ (۲\text{لا}+\frac{\text{ن}\pi}{۲})$

(۴۵) $۲\ \text{و}^{\text{لا}^{۲}}\left[(۴\text{لا}^{۲}+۱)\ \text{جم}\ (\text{لا}^{۲})+\text{جب}\ (\text{لا}^{۲})\right]$

(۴۶) $\frac{۳}{\text{لا}^{۲}}\ \text{مم لوک}\ (\text{ﻙ}\ \text{لا})\ \text{قم}^{۲}\ (\text{لوک ﻙ لا})\left[-۲+۴\ \text{قم}^{۲}\ (\text{لوک ﻙ لا})+\text{مم لوک ﻙ لا}\right]$

(۴۷) $\text{و}^{\text{قط}^{-۱}\ ۲\text{ط}}\left[\frac{۱}{۴\text{ط}^{۲}(۴\text{ط}^{۲}-۱)}-\frac{۴\text{ط}\ (۸\text{ط}^{۲}-۱)}{(۱۶\text{ط}^{۴}-۴\text{ط}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}\right]$

(۴۸) $\frac{(\text{لوک ﻙ})^{۲}\left[\text{ﻙ}^{\text{لا}}-\text{ﻙ}^{۳\text{لا}}\right]}{(۱+\text{ﻙ}^{۲\text{لا}})^{۲}}$ (۴۹) $-\text{و}^{\frac{۱}{\text{لا}}}\left[\frac{۶\text{لا}^{۲}-۳\text{لا}^{۲}+۱}{\text{لا}^{۲}}\right]$

(۵۰) $\frac{\text{و}^{\text{م مس}^{-۱}\text{لا}}}{(۱+\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$ (۵۱) $\frac{-\text{ن ب}\ (\text{ا}^{۲}+\text{ب لا}^{۲})}{(\text{ا}^{۲}-\text{ب لا}^{۲})^{۲}}$

(۵۲) $-\frac{ج^۲}{ا^۲}\frac{لا}{ی}$ ، $-\frac{ج^۲}{ب^۲}\frac{ما}{ی}$ ، $-\frac{ج^۲(ج^۲لا^۲+ا^۲ی^۲)}{ا^۴ی^۳}$ ،

$-\frac{ج^۲(ج^۲ما^۲+ب^۲ی^۲)}{ب^۴ی^۳}$ ، $-\frac{ج^۴ لا ما}{ا^۲ب^۲ی^۳}$

(۵۳) $\frac{۲لا}{ی}$ ، $\frac{۲ما}{ی}$ ، $\frac{۲(ی^۲-۲لا^۲)}{ی^۳}$ ، $\frac{۳(ی^۲-۳ما^۲)}{ی^۳}$ ، $-\frac{۶لا ما}{ی^۳}$

(۵۴) $\frac{لا}{۲}-\frac{ما}{۶}$ ، $-\frac{لا}{۶}+\frac{۲}{۵}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ، $-\frac{۲}{۵}$ ، $-\frac{۱}{۶}$ ۔

(۵۵) $\frac{۱}{\sqrt{۱-لا^۲}}$ ؛ $\frac{۱}{\sqrt{۱-ما^۲}}$ ؛ $-\frac{لا}{(۱-لا^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ ؛ $\frac{ما}{(۱-ما^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ ، صفر

(۵۶) $+\frac{ما(لا^۲-ما^۲)}{(لا^۲+ما^۲)^۲\times جب\,ی}$ ، $-\frac{لا(لا^۲-ما^۲)}{(لا^۲+ما^۲)^۲\,جب\,ی}$ ،

$-\left[\frac{۲لا\,ما(لا^۲-۳ما^۲)}{(لا^۲+ما^۲)^۳}+\frac{جم\,ی\,ما^۲(لا^۲-ما^۲)^۲}{جب^۲ی(لا^۲+ما^۲)^۴}\right]\times-\frac{۱}{جب\,ی}$ ،

$-\left[\frac{۲لا\,ما(ما^۲-۳لا^۲)}{(لا^۲+ما^۲)^۳}+\frac{جم\,ی\,لا^۲(لا^۲-ما^۲)^۲}{جب^۲ی(لا^۲+ما^۲)^۴}\right]\times-\frac{۱}{جب\,ی}+\ldots\ldots$

(۵۷) $\frac{لا^۲-ما^۲-ی^۲}{لا(لا^۲+ما^۲+ی^۲)}$ ، $\frac{ما^۲-لا^۲-ی^۲}{ما(لا^۲+ما^۲+ی^۲)}$ ، $\frac{ی^۲-لا^۲-ما^۲}{ی(لا^۲+ما^۲+ی^۲)}$

$\frac{۲لا^۲(لا^۲+ما^۲+ی^۲)-(لا^۲-ما^۲-ی^۲)(۳لا^۲+ما^۲+ی^۲)}{لا^۲(لا^۲+ما^۲+ی^۲)^۲}$ ،

$\frac{۲ما^۲(لا^۲+ما^۲+ی^۲)-(ما^۲-لا^۲-ی^۲)(۳ما^۲+لا^۲+ی^۲)}{ما^۲(لا^۲+ما^۲+ی^۲)^۲}$ ،

$\frac{۲ی^۲(لا^۲+ما^۲+ی^۲)-(ی^۲-لا^۲-ما^۲)(۳ی^۲+لا^۲+ما^۲)}{ی^۲(لا^۲+ما^۲+ی^۲)^۲}$ ،

$\frac{-۴لا\,ما}{(لا^۲+ما^۲+ی^۲)^۲}$ ، $\frac{-۴لا\,ی}{(لا^۲+ما^۲+ی^۲)^۲}$ ، $\frac{-۴ما\,ی}{(لا^۲+ما^۲+ی^۲)^۲}$

(۵۸) $۲لا\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}$، $۲ما\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}$، $۲ی\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}$، $۲\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}(۱+۲لا^۲)$، $۲\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}(۱+۲ما^۲)$، $۲\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}(۱+۲ی^۲)$، $۴لاما\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}$، $۴مای\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}$، $۴ی لا\,و^{لا^۲+ما^۲+ی^۲}$

(۵۹) $\frac{۲لا\,و^{لا+ما}}{لا^۲+ما^۲}+ی$، $\frac{۲ما\,و^{لا+ما}}{لا^۲+ما^۲}+ی$، $\frac{۲\,و^{لا+ما}}{لا^۲+ما^۲}\left(۲لا+۱-\frac{۲لا^۲}{لا^۲+ما^۲}\right)+ی$، $\frac{۲\,و^{لا+ما}}{لا^۲+ما^۲}\left(۲ما+۱-\frac{۲ما^۲}{لا^۲+ما^۲}\right)+ی$، $\frac{۲\,و^{لا+ما}}{لا^۲+ما^۲}\left(لا+ما-۱-\frac{۴لاما}{لا^۲+ما^۲}\right)$

مشقی سوالات (۲۱) صفحہ ۱۵۳

(۱) ۴، $\frac{۳}{۴}$ ۲۲، ۷، مس$^{-۱}$ ۴، مس$^{-۱}\frac{۳}{۴}$ ۲۲، مس$^{-۱}$ ۷،

(۲) ۱، ۴۵°

(۳) (۲، ۴)، ($\frac{۲}{۹}$، $\frac{۴}{۲۷}$) (۰، ۰)

(۴) (-۱، ۱۰)، (۳، -۲۲)

(۵) (ا) ۳لا + ۸ما = ۲۵، ۸لا - ۳ما = ۱۸، $-\frac{۱۶}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$

(ب) لاجم طہ + ماجب طہ = ر، ماجم طہ - لاجب طہ = صفر،

$-\frac{رجب^۲ طہ}{جم طہ}$، رجم طہ

(ج) ب لا + د ما = $\sqrt{۲}$ د ب، $\sqrt{۲}$ (د لا - ب ما) = د^۲ - ب^۲،

$-\frac{۱}{۲}$ د $\sqrt{۲}$، $\frac{-ب^۲\sqrt{۲}}{۲د}$

(۶) ۱۶

(۷) ۴۵

(۸) $۲\frac{۲}{۳}$ ۴، $\frac{۲}{۳}$ ۵۵)

(۹) مس$^{-۱}\frac{۴}{۳}$

(۱۰) ۷لا - ۴ما - ۱۷ = ۰، ۱۸۹لا - ۱۰۸ما - ۲۰۹ = ۰

(۴) ۴۵°

(۵) ۹۰°

۴،۶ - صفحہ ۱۶۹

(۲) ۱، ۱، -۱ ± ۲ خ

(۳) ۲، ۲، -۱، -۳

(۴) ۱، ۱، -۱، -۱، ۲

(۵) ۰، ۰، ۰، ۰، ۱، ۱، $\frac{۱}{۳}$

(۶) ۱، ۱، -۱، -۱، ۳

(۷) -۱ ± $\sqrt{۲}$ خ، -۱ ± $\sqrt{۲}$ خ، $\frac{-۳ \pm \sqrt{-۳۵}}{۲}$

(۸) -۱، -۱، -۱، ۳ ± ۲ خ

(۹) $ب^{۲} = ۴ ا ج$

(۱۰) $(ب ج - ۹ ا د)^{۲} = ۴(۳ ب د - ج^{۲})(۳ ا ج - ب^{۲})$

۴،۷ - صفحہ ۱۷۳

(۲) (ا) (-۱، ۰) اعظم، (۳، -۳۳) اقل

(ب) ($\frac{۲}{\sqrt{۳}}$، $\frac{-۲(۲)^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{۳}}$) اقل، ($-\frac{۲}{\sqrt{۳}}$، $+\frac{۲(۲)^{\frac{۱}{۳}}}{\sqrt{۳}}$) اعظم

(ج) (۱، ۲) اعظم؛ (۲، ۱) اقل

(د) لا = -۱ اعظم؛ لا = ۲ اقل

(۳) (ا) لا = ۱ اقل = ۳

لا = ۲ اعظم = ۴

لا = ۳ اقل = ۳

(ب) لا = - ۶　اعظم = صفر
لا = - ۳　اقل = - ۱۹۶۸۳
لا = ۲　اعظم = ۸۱۹۲
(ج) لا = - ۱　اعظم = صفر
لا = - ۱/۲　اقل = - ۲۷/۶۴ لا^۶
لا = ۱　کچھ بھی نہیں
(د) (۳/۲ ، ۰) اقل ؛ لا = (- ۱۵ ± √۱۱۳)/۸ اقل

صفحہ ۴۷۲، ۴۷۶

(۳) لا = - ۱　اقل = - ۳
لا = ۱　اعظم = ۳۰
(۴) لا = ۴، اعظم = ۱
لا = ۱۶　اقل = ۲۵
(۵) لا = ۱/۴　اقل = ۲۷/۳۲ لا^۲
(۶) اعظم (۲، ۰)　اقل (۰، - ۱)
(۷) لا = ۲ اعظم، لا = - ۲ اقل
(۸) لا = ۷ π/۶ اعظم
= ۱۱ π/۶ اقل
(۹) لا = ۲ π/۳ اعظم
لا = ۴ π/۳ اقل
(۱۰) لا = ۵ اقل
لا = ۱/۲ اعظم
لا = - ۱ اقل

(۱۳) مربع = ۱/√۲ ا ربع کا نصف قطر

(۱۴) $\frac{ک^2}{8}$

(۱۵) ۸۰

(۱۶) لا = $\frac{1}{32}$

(۱۷) ۵ فٹ

(۱۸) قاعدہ کا ضلع = ۲۰ گہرائی = ۱۰

(۱۹) $\frac{\pi}{4}$

(۲۰) ر = نصف قطر = ۱۰ $\sqrt[4]{\frac{4}{\pi^3}}$ = ۶.۰۶

ل = بلندی = ۱۰ $\sqrt[4]{\frac{12}{3\pi}}$ = ۱۰.۰۵ حجم = ۳۳۰ مکعب فٹ

صفحہ ۱۸۰ - ۴، ۵

(۳) ن جفت ہو تو منحنی ہر جگہ مقعر۔ ن طاق ہو تو لا > ۰ محدب، لا < ۰ مقعر (۰، ۰) نقطۂ انعطاف

(۴) (۰، π)، ($\frac{\pi}{2}$، $\frac{3\pi}{2}$)، (۰، π): کوئی نقاط انعطاف نہیں

قط لا مقعر (-$\frac{\pi}{2}$، $\frac{\pi}{2}$) محدب ($\frac{\pi}{2}$، ۳$\frac{\pi}{2}$)

قم لا (۰، π) محدب (π، ۲π)

(۵) کوئی نقاط انعطاف نہیں۔ ولا ہمیشہ مقعر اور کوک لا ہمیشہ محدب۔

(۶) لا = ۲، -$\frac{1}{2}$

(۷) لا = ۰، $\frac{2}{3}$

(۸) لا = $\frac{5}{3}$

(۹) لا = ك

(۱۰) کوئی نقطہ انعطاف نہیں ہمیشہ مقعر

(۱۱) " " " محدّب

(۱۲) $\frac{\text{فر}^2 \text{ا}}{\text{فر لا}^2} = \frac{\triangle}{(\text{ھ لا + ب ما + ف})^3}$

کوئی نقطہ انعطاف نہیں۔

۱۹۱۴ - صفحہ ۱۸۵

(۴) ۶۰ میل فی گھنٹہ۔ ۴۴ ثانیے۔ ۱۹۳۶ فٹ

(۶) (ا) ت = $\frac{۳}{۴}$ ع = -۳۲، و = ۲۴ ع اسراع و رفتار

ت = $\frac{۳}{۲}$ ع = -۳۲ و = ۰

(ب) ت = $\frac{۱}{۲}$، ع = $\frac{-\sqrt{۳}\,\text{ك}\,\pi^2}{۱۸}$، و = $-\frac{\text{ك}\,\pi}{۶}$

ت = ۱ ع = $\frac{-\text{ك}\,\pi^2}{۱۸}$ و = $\frac{-\text{ك}\,\pi \times \sqrt{۳}}{۶}$

ت = $\frac{۳}{۲}$ ع = صفر و = $\frac{-\text{ك}\,\pi}{۳}$

(ج) ع = ۴ ب و$^{-۲}$، و = -۲ ب و$^{-۲}$

(د) ت = ۰، ع = ۰، و = ۲

ت = ۱ ع = -۶، و = -۱

(۱۰) لا = ج و ± $\sqrt{\text{ا ٓ ۔ ت}}$

(۱۱) لا = ۳ جم ۲ ت : ۔ ۶ جب ۱۰ ن؛ ۳ جم ۱۰ ن

(۱۲) (ا) ۱۶، ۲، $۶۴\sqrt{۳}$

(ب) ۳۲، $۲\sqrt{۲}$، ۱۲۸

(ج) ۲٬۴۸ ، $۲\sqrt{۳}$ ، $۶۴\sqrt{۳}$

۹۲ء۴ ـ صفحہ ۱۸۸-۱۸۹

(۳) نصف قطر کے بڑھنے کی شرح = $\frac{۱}{\pi ۹}$ = ۰۳۵ء۰ انچ فی ثانیہ

سطح کے " " = $\frac{۱۶}{۳}$ مربع انچ۔

(۴) (ل) ۵ میل فی گھنٹہ (ب) ۲ میل فی گھنٹہ

(۵) ۰۶ء۱ فٹ فی ثانیہ

(۶) $\frac{۱}{۲۵۶}$ اکائیاں فی منٹ گھٹ رہا ہے۔

(۷) (ل) ۸۷۵ء (ب) ۸۷۵ء۰

(۸) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ = ۵۵ء اکائی فی ثانیہ گھٹ رہا ہے۔ صفر

(۹) π ۲۵ مکعب اکائیاں فی منٹ

(۱۰) ۴ میل

(۱۱) $\frac{-۱۲۸\pi}{۳}$ ، $\frac{-۱۲\pi}{۴\sqrt{۱}}$

(۱۲) $\frac{۱}{\pi ۴}$

مشقی سوالات (۲۲) صفحہ ۱۹۹

(۱) ل لا + ب $\frac{لا^۲}{۲}$ + ک (۲) لا^۴ ـ لا^۳ + ۲ لا^۲ ـ ۷ لا + ک

(۳) ل لا ـ ۲ ب $\sqrt{لا}$ + ک (۴) $\frac{لا^۳}{۳}$ ـ ۱۰ لا ـ $\frac{۵}{لا}$ + ک

(۵) لا ـ ۶ $\sqrt{لا}$ + ۳ لوک لا + $\frac{۲}{\sqrt{لا}}$ + ک (۶) $\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$ لوک $\frac{لا + \sqrt{۲}}{لا - \sqrt{۲}}$ + ک

(۷) لوک $\{لا + \sqrt{لا^۲ - ۳}\}$ + ک (۸) جب$^{-۱}$ $\frac{لا}{۲}$ + ک

(۹) لوک $\{لا + \sqrt{لا^۲ + ۹}\}$ + ک (۱۰) $\frac{لا}{۲}\sqrt{۲۵ - لا^۲}$ + ۲۵ جب$^{-۱}$ $\frac{لا}{۵}$ + ک

(۱۱) مس طہ ـ طہ + ک (۱۲) لوک (۱ ـ جم طہ) + ک

(۱۳) ۲ مم ط - ط + ک (۱۴) $\frac{1}{11}$ لا^{11} + $\frac{1}{\text{لوک}\ 10}$ $(10)^{\text{لا}}$ + ک

(۱۵) لا + ک

مشقی سوالات (۲۳) صفحہ ۲۰۹

(۱) $\frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^2}{8} + \frac{\text{لا}}{8} + \frac{1}{16}$ لوک (۲لا - ۱) + ک

(۲) $\frac{1}{3}$ لوک $\frac{\text{لا} + 2}{\text{لا} - 1}$ + ک (۳) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ مس$^{-1}$ $\frac{2\text{لا} - 1}{\sqrt{3}}$ + ک

(۴) لوک $\frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + 1}}$ + ک (۵) جب$^{-1}$ (۲لا - ۱) + ک

(۶) ۲ $\sqrt{\text{لا}^2 - 1}$ + لوک (لا + $\sqrt{\text{لا}^2 - 1}$) + ک

(۷) $\frac{1}{3}$ لوک $\left\{\text{لا}^3 - 3 + \sqrt{\text{لا}^6 - 6\text{لا}^3 + 5}\right\}$ + ک

(۸) ۳ $\sqrt{19 - 5\text{لا} + \text{لا}^2}$ + $\frac{19}{2}$ لوک (لا - $\frac{5}{2}$ + $\sqrt{19 - 5\text{لا} + \text{لا}^2}$) + ک

(۹) $\frac{9}{2}$ جب$^{-1}$ $\frac{2\text{لا} - 3}{2}$ − ۲ $\sqrt{12\text{لا} - 4\text{لا}^2 - 5}$ + ک

(۱۰) $\frac{1}{16}$ لوک $\frac{2\text{لا} - 3}{2\text{لا} + 1}$ − $\frac{1}{8}$ لوک (۴لا^2 - ۴لا - ۳) + ک

(۱۱) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جب$^{-1}$ $\frac{4\text{لا} - 3}{\sqrt{41}}$ + ک (۱۲) $\frac{2}{3}$ $\sqrt{3\text{لا} + 9\text{لا}^2}$ + ک

(۱۳) $\frac{1}{6}$ $(6 + \text{لا} - \text{لا}^2)^6$ + ک (۱۴) $\frac{1}{9}$ $(\text{لا}^3 - 3\text{لا}^2 + 3\text{لا} - 10)^3$ + ک

(۱۵) $\frac{1}{2}$ (لوک لا)^2 + ک (۱۶) $\frac{1}{2}$ (مس$^{-1}$ لا)^2 + ک

(۱۷) $\frac{1}{2}$ ط - $\frac{\text{جب}\ 2\text{ط}}{12}$ + ک (۱۸) − $\frac{1}{6}$ جم ط جب^5 ط − $\frac{5}{4 \times 6}$ جم ط جب^3 ط

− $\frac{3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}$ جب ط جم ط + $\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}$ ط + ک

(۱۹) $\frac{1}{4}$ جم^3 ط جب ط + $\frac{1 \times 3}{2 \times 4}$ جم ط جب ط + $\frac{1 \times 3}{2 \times 4}$ ط + ک

(۲۰) ۱/۷ جم^۷ طہ − ۳/۵ جم^۵ طہ + جم^۳ طہ − جم طہ + ک

(۲۱) ۱/۵ جب^۵ طہ − ۲/۳ جب^۳ طہ + جب طہ + ک

مشقی سوالات (۲۴) صفحہ ۲۲۰

(۱) جب ۲ لا / ۴ − لا جم ۲ لا / ۲ + ک (۲) (لا^۲ − ۲) جب لا + ۲ لا جم لا + ک

(۳) (لا^۳ − ۳ لا^۲ + ۶ لا − ۶) و^لا + ک

(۴) ۱/۳۶ {۳ لا (جب ۳ لا + ۹ جب لا) + جم ۳ لا + ۲۷ جم لا} + ک

(۵) لا^۲/۲ (لوک لا)^۲ − لا^۲/۴ لوک (لا^۲/و) + ک

(۶) و^لا/۵ (جب ۲ لا − ۲ جم ۲ لا) + ک

(۷) و^۲لا/۵ (جب لا + ۲ جم لا) + ک

(۸) و^-لا/۱۰ (۳ جب ۳ لا − جم ۳ لا) + ک

(۹) ۱/۲√۵ و^لا جب (۲ لا − مس^-۱ ۲) + ک

(۱۰) لا مس^-۱ لا + لوک ۱/√(۱ + لا^۲) + ک

(۱۱) ۱/۴ (۲ لا^۲ − ۱) جب^-۱ لا + ۱/۴ لا √(۱ − لا^۲) + ک

(۱۲) لا^۳/۳ مس^-۱ لا − لا^۲/۶ + ۱/۶ لوک (۱ + لا^۲) + ک

(۱۳) ۱/۳۲ (جب ۶ لا/۶ − ۳/۲ جب ۴ لا + ۱۵/۲ جب ۲ لا − ۱۰ لا) + ک

(۱۴) ۱/۶۴ (۱/۷ جم ۷ لا − ۷/۵ جم ۵ لا + ۷ جم ۳ لا − ۳۵ جم لا) + ک

(۱۵) $\frac{۳}{۸}$ لا + $\frac{۱}{۴}$ جب ۲لا + $\frac{۱}{۳۲}$ جب ۴لا + ک

(۱۶) جب لا − $\frac{۲}{۳}$ جب^{۳} لا + $\frac{۱}{۵}$ جب^{۵} لا + ک

(۱۷) $\frac{۱}{۸}$ جب^{۸} لا − $\frac{۱}{۱۰}$ جب^{۱۰} لا + ک

(۱۸) $\frac{۱}{۹}$ جم^{۹} لا − $\frac{۳}{۷}$ جم^{۷} لا + $\frac{۳}{۵}$ جم^{۵} لا − $\frac{۱}{۳}$ جم^{۳} لا + ک

(۱۹) $\frac{۱}{۷}$ جب^{۷} لا − $\frac{۱}{۹}$ جب^{۹} لا + ک

(۲۰) − $\frac{۱}{۱۰}$ جب^{۵} لا جم^{۵} لا + $\frac{۱}{۱۲۸}$ ($\frac{۳}{۲}$ لا − $\frac{۱}{۲}$ جب ۴لا + $\frac{۱}{۱۶}$ جب ۸لا) + ک

مشقی سوالات (۲۵) صفحہ ۲۳۲

(۱) − $\frac{۳}{۲}$ (۲) − $\frac{۱}{۱۲}$ لوک ۵ (۳) $\frac{\pi}{۶}$

(۴) لوک $\frac{۶+۴\sqrt{۲}}{۴-۲\sqrt{۳}}$ (۵) $\frac{\pi}{۱۲}$ (۶) $\frac{\pi}{۱۰}$ (۷) $\frac{\pi}{۸}$

(۸) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$ (۹) $\frac{\pi}{۲}$ (۱۰) $\frac{\pi}{۳}$ (۱۱) $\frac{\pi}{۱۲}$ (۱۲) $\frac{۵\pi}{۳۲}$

(۱۳) $\frac{۲۵۶}{۶۹۳}$ (۱۴) $\frac{۳\pi}{۵۱۲}$ (۱۵) $\frac{۲}{۳۵}$ (۱۶) $\frac{۸}{۳۱۵}$

مشقی سوالات (۲۶) صفحہ ۲۳۶

(۱) $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ (۲) ۲ (۳) $\frac{۱۶}{۳}$ (۴) ۶ (۵) $\frac{۵۲}{۹}$

(۶) $\frac{۱}{۶}$ (۷) $\frac{۱}{۵}$ لوک $\frac{۳}{۲}$ (۸) $\sqrt{۳}$ − $\frac{\pi}{۳}$ (۹) ۴π (۱۰) $\frac{۱}{۴}$ π اب

مشقی سوالات (۲۷) صفحہ ۲۴۱

(۱) $\frac{لا}{ا^۲\sqrt{ا^۲-لا^۲}}$ + ک (۲) $\frac{۱}{۳}$ لوک $\frac{\sqrt{۴لا^۲+۹}-۳}{۲لا}$ + ک،

(۳) $\frac{۱}{۳لا}\sqrt{لا^۲-۳}$ + ک (۴) $\sqrt{لا^۲-۱۶}$ − ۴ قط$^{-۱}\frac{لا}{۴}$ + ک

(۵) $-\frac{۱}{۵لا}\sqrt{۵-لا^۲}$ + ک (۶) لوک $(لا+\sqrt{لا^۲-۳۶})-\frac{\sqrt{لا^۲-۳۶}}{لا}$ + ک

(۷) $\frac{۱}{۳}$ لوک $\left\{\frac{لا}{\sqrt{لا^۲-۹}+۳}\right\}$ + ک (۸) $-\frac{۱}{لا}\sqrt{۴-لا^۲}$ − جب$^{-۱}\frac{لا}{۲}$ + ک

(۹) $\frac{۱}{۶}\,\frac{لا+۲}{لا^۲+۴لا+۷}+\frac{\sqrt{۳}}{۱۸}$ مس$^{-۱}\frac{لا+۲}{\sqrt{۳}}$ + ک

(۱۰) −۲ جب$^{-۱}\sqrt{\frac{ا-لا}{ا}}$ + ک (۱۱) $\frac{\pi}{اب}$

(۱۲) $\frac{\pi}{۳\sqrt{۳}}$ (۱۳) $\frac{۲\pi}{۳\sqrt{۳}}$

۲ ۔ ۶ صفحہ ۲۴۷-۲۴۹

(۲) (ا) ۰، $\pm\sqrt{۳}$، $\pm$۱

(ب) ۰، ۰، ۶، ۰، ۴

(ج) $\frac{-ب\pm\sqrt{ب^۲-۴اج}}{۲ج}$، $\frac{-ب}{۲ج}$

(د) $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۵}{۴}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۷}{۴}$ (۰، ۲π کے درمیان)

(ہ) ۰، ۱، $\frac{۱}{و}$

(۵) (ا) $\sqrt{\frac{۳۷}{۱۲}}$

(ب) $\frac{۲۸۹}{۶۴}$

(ج) ۰ < لوک (و - ۱) < ۱

(د) $\frac{۱}{\text{لوک ۹ - لوک ۴}}$ - ۱

(۷) ط = $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۲}$ ،

(۸) $\frac{\sqrt{۱۲۷} - \sqrt{۱۰۸}}{\sqrt{۳}}$ ، $\frac{\sqrt{۲۱۷} - \sqrt{۱۹۲}}{\sqrt{۳}}$

۳ و ۶ — صفحہ ۲۵۲-۲۵۳

(۳) ۳(لا - ۲)^{۳} + ۱۳(لا - ۲)^{۲} + ۲۴(لا - ۲) + ۱۵

(۴) لوک (لا + ھ) = لوک ھ + $\frac{\text{لا}}{\text{ھ}}$ - $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲\text{ھ}^{۲}}$ + $\frac{\text{لا}^{۳}}{۳\text{ھ}^{۳}}$ - $\frac{\text{لا}^{۴}}{۴\text{ھ}^{۴}}$

لوک (۱ + لا) = لا - $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲}$ + $\frac{\text{لا}^{۳}}{۳}$ - $\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}$

(۵) ۵ لا^{۳} - ۳۴ لا^{۲} + ۹۴ لا - ۱۰۰

(۶) لا^{۳} + ۹ لا^{۲} + ۲۳ لا + ۲۲

(۷) (لا - ۱) - $\frac{(\text{لا} - ۱)^{۲}}{۲}$ + $\frac{(\text{لا} - ۱)^{۳}}{۳}$ ....

(۸) جب (لا + ا) = جب لا + ا جم لا - $\frac{\text{ا}^{۲}}{۲!}$ جب لا - $\frac{\text{ا}^{۳}}{۳!}$ جم لا + $\frac{\text{ا}^{۴}}{۴!}$ جب لا ....

(۹) $\frac{۱}{\text{و}}$ - $\frac{\text{لا} - \text{و}}{\text{و}^{۲}}$ + $\frac{(\text{لا} - \text{و})^{۲}}{\text{و}^{۳}}$ ....

(۱۰) (ا) و$^{\text{ھ}}$ [۱ + لا + $\frac{\text{لا}^{۲}}{۲!}$ + $\frac{\text{لا}^{۳}}{۳!}$ + ...]

(ب) لا$^{\text{م}}$ + م لا$^{\text{م}-۱}$ ھ + $\frac{\text{م}(\text{م} - ۱)}{۲!}$ لا$^{\text{م}-۲}$ ھ^{۲} + ...

(۱۲) (ا) $و^{لا} = ۱ + لا + \frac{لا^۲}{|۲} + \frac{لا^۳}{|۳} + \cdots\cdots$

(ب) $لوک (۱ + لا) = لا - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۴}{۴} + \frac{لا^۵}{۵} + \cdots\cdots$

(ج) $جب^{-۱} لا = لا + \frac{۱ \times لا^۳}{۲ \times ۳} + \frac{۱ \times ۳ \times لا^۵}{۲ \times ۴ \times ۵} + \cdots\cdots$

(د) $مس^{-۱} لا = لا - \frac{لا^۳}{۳} + \frac{لا^۵}{۵} - \frac{لا^۷}{۷} \cdots\cdots$

(ہ) $۱ - \frac{لا^۲}{|۲} + \frac{لا^۴}{|۴}$

(و) $مس لا = لا + \frac{لا^۳}{۳} + \frac{۲لا^۵}{۱۵} + \frac{۱۷}{۳۱۵} لا^۷$

(ز) $قط لا = ۱ + \frac{لا^۲}{۲} + \frac{۵لا^۴}{۲۴} + \frac{۶۱}{۷۲۰} لا^۶ + \cdots\cdots$

۴ء ۶ ـ صفحہ ۲۵۶

(۲) (ا) لا = ۴ اقل = ۹

لا = ۲ اعظم = ۱۳

(ب) لا = ۰ کوئی قیمت نہیں

لا = ۳ اقل = −۲۲

(ج) لا = −۱ پر کچھ نہیں

(د) لا = $\frac{۶}{۵}$ اعظم = ۱ء۱۱

لا = ۲ اقل = صفر

لا = ۰ پر کچھ نہیں

(ہ) لا = $\frac{\pi}{۴}$ اعظم

اور لا = π پر کچھ نہیں۔

لا = $-\frac{\pi}{۲}$ اقل

(و) لا = و اقل

(ز) لا = ۰ اعظم = صفر

(ح) لا = $\frac{\pi}{۲}$ اقل لا = جب$^{-۱}$ $\frac{۳\pi}{۴}$ اعظم

(ط) لا = جم لا اعظم

(ی) لا = ۰ اقل .... (آخری رقم + ۲۱۶ لا^{۲})

(ک) لا = ۰ اقل

(ل) لا = ۰ پر کچھ نہیں

(م) لا = $\frac{۱}{ه}$ اقل

(ن) لا = $\pm \frac{\pi}{۴}$ اعظم و اقل

(ص) لا = ۲ پر کچھ نہیں۔

غیر معیّن شکلیں

۵، ۶ ـ صفحہ ۲۵۸-۲۵۹

(ا) $\frac{۱}{۶}$

(ب) $\frac{۱}{\text{لو}_ن ۵ - ۱}$

(ج) $\frac{۳}{۲}$

(د) $-\frac{۱}{۳}$

(ه) $\frac{۲۹۶}{۹}$

(و) $\frac{۱}{۴}$

(ز) ۱

(ح) ۱

(ط) $-\frac{۱}{۸}$

(ی) لوک $\frac{۱}{ب}$
(ک) صفر
(ل) $\frac{۱}{۲}$
(م) ∞
(ن) $-\frac{۱}{۲}$

۵۲ و ۶_ صفحہ ۲۶۱-۲۶۴

(۳) صفر
(۴) صفر
(۵) $-\infty$
(۶) $\frac{۳}{۵}$
(۷) صفر
(۱۰) $\frac{۴}{\pi}$
(۱۱) -۲
(۱۲) صفر
(۱۳) $\frac{۱}{۳}$
(۱۴) ۱
(۱۵) ۱
(۱۶) $\frac{\pi^۲}{۴}$
(۱۷) صفر
(۱۸) $-\frac{۱}{۴}$
(۱۹) -۱
(۲۳) و
(۲۴) ۱

(۲۵) $\frac{1}{\text{و}}$

(۲۶) ۱۰

(۲۷) و^{2}

(۲۸) ۱

(۲۹) $\frac{2}{\pi\,\text{و}}$

(۳۰) $\frac{1}{\text{و}}$

(۳۱) $\frac{1}{2}$

(۳۲) و

(۳۳) $\frac{-\text{ن م}^{2}}{2\,\text{و}}$

۶ ی ۶ _ صفحہ ۲۶۶

(۲) تیسرے اور پانچویں رتبہ کا تماس

(۳) دوسرے اور چھٹے رتبہ کا تماس

(۴) دوسرے رتبہ کا تماس مبداء پر

(۵) دوسرے رتبہ کا تماس مبداء پر

(۶) تیسرے رتبہ کا تماس مبداء پر

۸ ی ۶ _ صفحہ ۲۷۳-۲۷۵

(۲) $\text{ع} = -4$، $\text{ب} = \frac{8}{3}$ $\text{ر} = \frac{5}{3}\sqrt{10}$

$\text{ع} = 143$، $\text{ب} = \frac{-241}{12}$ $\text{ر} = -\frac{145}{3}\sqrt{145}$

$\text{ع} = \frac{7}{64}$، $\text{ب} = \frac{31}{48}$ $\text{ر} = \frac{125}{92}$

(۳) $\text{ع} = -1$، $\text{ب} = \frac{5}{2}$ $\text{ر} = 2\sqrt{3}$

$\text{ع} = ۸$، $\text{بہ} = ۶$، $\text{ر} = ۵\sqrt{۵}$

(۴) $\text{ع} = \frac{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}{\text{ا}}$، $\text{بہ} = ۰$، $\text{ر} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$

$\text{ع} = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{\text{ا}}$، $\text{بہ} = ۰$، $\text{ر} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$

(۵) $\text{ع} = ۰$، $\text{بہ} = \text{ب} - \frac{\text{ا}^2}{۳\text{ب}}$، $\text{ر} = \frac{\text{ا}^2}{-۳\text{ب}}$

(۷) $\text{ع} = ۳$، $\text{بہ} = -۴$، $\text{ر} = -۶$

(۸) $\frac{۳۹}{۸}$

(۱۰) $(۰، \pm ۱)$، $\text{ر} = -\frac{۱}{۴}، \frac{۱}{۸}$

(۱۱) ۱۹۳۱، ±

(۱۲) $\text{ع} = \frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\text{لا}^3}{\text{ا}^4}$، $\text{بہ} = -\frac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\text{ما}^3}{\text{ب}^4}$

$(\text{ا}\,\text{لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{ب}\,\text{ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا}^2 - \text{ب}^2)^{\frac{2}{3}}$

(۱۳) $\text{ع} = -۴\text{لا}^3$، $\text{بہ} = \frac{۱}{۲} + ۳\text{ما}$، $\text{ر} = \frac{(۱ + ۴\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{۲}$

(۱۴) $\text{ع} = \frac{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)\text{لا}^3}{\text{ا}^4}$، $\text{بہ} = -\frac{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)\text{ما}^3}{\text{ب}^4}$، $\text{ر} = \frac{(\text{ا}^4\text{ما}^2 + \text{ب}^4\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^4\text{ب}^4}$

(۱۵) $\text{ع} = \text{لا} + ۳\text{لا}^{\frac{1}{3}}\text{ما}^{\frac{2}{3}}$، $\text{بہ} = \text{ما} + ۳\text{لا}^{\frac{2}{3}}\text{ما}^{\frac{1}{3}}$، $\text{ر} = -۳(\text{ا}\,\text{لا}\,\text{ما})^{\frac{1}{3}}$

(۱۶) $\text{ع} = -۸\text{ت}^3$، $\text{بہ} = ۶\text{ت}^2$، $\text{ر} = (۱ + ۴\text{ت}^2)^{\frac{3}{2}}$

(۱۷) $\text{ع} = ۱ + \text{ت} - \frac{\text{ت}^5}{۲}$، $\text{بہ} = \frac{۲}{\text{ت}} + \frac{۵\text{ت}^3}{۶}$، $\text{ر} = \frac{(۱ + \text{ت}^4)^{\frac{3}{2}}}{۲\text{ت}^3}$

(۱۸) $\text{ع} = -۲\,\text{جم}\,\text{ط}\,\text{جم}\,\text{ط}$، $\text{بہ} = \text{ط} + \text{جم}\,\text{ط} + \text{جم}^2\,\text{ط}$، $\text{ر} = \frac{(۱ + \text{جم}^2\,\text{ط})^{\frac{3}{2}}}{\text{جب}\,\text{ط}}$

(۱۹) $\text{ع} = -(۱ - \text{جم}\,\text{ط})$، $\text{بہ} = \text{ط} + \text{جب}\,\text{ط}$، $\text{ر} = ۴\,\text{جب}\,\frac{\text{ط}}{۲}$

(۲۰) ہہ = لا ـ مس لا، بہ = ا + ۱، ہا = قط لا،

(۲۱) (لا + ا)^۲/۳ ـ (لا ـ ا)^۲/۳ = ۲ ی^۲/۳

(۲۲) عہ = لا + ی^۳ (۱ + ۹ا^۲/۴ی^۲) / ۶ا، بہ = ا ـ ا (۱ + ۹ا^۲/۴ی^۲) / ۲

ر = ی [۱ + ۹ا^۲/۴ی^۲]^۳/۲ / ـ ۶ا، ∞، ∞ ؛ ∞

صحت نامہ

احصائے تفرقی و تکملی

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۴	۱۳	=!ا۱ =	=!ا۱ =	۹۵	۱۴	نہا ط←ـ	نہا ط←۰
۴۲	۲۳	نصفہ	فصلہ	۹۷	۱۳	ء۰۰۸۷۲۶۶ ،،	ء۰۰۸۷۲۶۶ =
۶۷	۱۹	کی لئل	کی اس	۹۸	۱۲	(جب ۲ا۱ - جم ۲ لا) / (جب ۲ لا)	(جب ۳ لا - جم ۲ لا) / (جب ۲ لا)
۶۹	۱۰	طاق عــد	طاق عدد	۱۱۳	۱۷	√۲ لا۲	۵√۲ لا۲
۷۱	۳	اپرغیز	اپرہ غیر	۱۱۹	۶	ر قم۲ لا فرلا	ر قم۲ لا فرلا
۷۸	۱۱	= - م۰ ڗ م-۱	=-م۰ م-۱ م-۱	۱۲۴	۱	فر(جب لا۲) / فرلا	فر(جب لا) / فرلا
،،	۱۵	ز لا + ھ	لا + ھ	۱۳۵	۱۷	جبگہ	جبکہ ی
۷۹	۱۴	لا / (ن+۱)	لا / (ن+۱)	۱۵۹	۱۴	ط = ف۲(ط)	ا = ف۲(ط)
،،	۱۵	لا / (ن-۱)	لا / (ن-۱)	۱۵۹	۲۱	ف۲(ط) / ف۱(ط)	ف۲(ط) / ف۱(ط)
۸۶	۷	وما	وا	۱۷۲	۲ دو جگہ	ٹھہراؤ	ٹھیراؤ
۸۷	۱۳	(و^ھ - ۱) / ھ	(و^ھ - ۱) / ھ				

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۱۰۳	۹	فر لا / فرت = ک ×	فر لا / فرت = ـ ک ×	۲۴۰	۷	۱ × (۱-۲)(۳-۵)(۱-۵) / ۷(۲-۷)(۴-۷)(۶-۷)	۱ × (۱-۲)(۳-۵)(۱-۵) / ۷(۲-۷)(۴-۷)(۶-۷)
۱۸۶	۱۸	ناپنے	ناپنے	۲۴۷	۱۹	ت³ / ۳	ت³ / ۳
۱۸۷	۱۷	فر ر / فرن	فر ر / فرت	۲۰۵ مشقی	۳	زائد	زائد
رر	۱۹	[(۱۰) ²(۲۴ + ۱۸ × ۲) + ...]	[(۱-) ²(۲۴ + ۱۸ × ۲) + ...]	جوابات ۳	۱۵	- ۵/۲ ۵/۶	- ۵/۲
۲۱۱	۲۰	ہوئے ہوئے	دیے ہوئے	۶	۱۱	۱۱۲ (لا + ۱) / (۲ لا² + ۴ لا - ۳)⁵	۱۱۲ (لا + ۱) / (۲ لا² + ۴ لا - ۳)⁵
۲۱۹	۱۷	ن کی اس آخری	ن کی اس آخری	۱۸	۱۲	(۱ - لا²)² +	(۱ - لا²)² +
۲۳۵	۱۰	لا^(۱/۴) / (۱ + لا^(۱/۴))	لا^(۱/۴) / (۱ + لا^(۱/۲))	۳۲	۱۷	جب طہ س	جب طہ س
۲۳۹	۱۱	∫ ^(π/۲)	∫ ^(π/۲)				